

УДК 336.018

**Лещев Владимир Владимирович****Преобразования Фурье и эффективность вычисления одной валютной пары по второй****Аннотация**

В статье приведено решение уравнения Гельфанда-Левитана для валютных курсов, с использованием преобразования Фурье. Результаты применяются для моделирования поведения курса валютных пар.

**Ключевые слова**

Прогнозирование валютных курсов, уравнение Гельфанда-Левитана, преобразование Фурье, математическое моделирование.

**Введение**

Рассмотрение вопроса валютного курса в экономической науке в процессе развития мировой валютной системы постоянно приобретало новый смысл. Если рассматривать валютный курс как экономическую категорию, то он является ценой денежной единицы той или иной страны. Но каждая страна не существует сама по себе, особенно если это страна с ориентацией на рыночную экономику. В современных условиях сфера использования показателя валютного курса весьма широка: он используется в государственных статистических

расчетах, определяет позицию страны в мировой экономике, отражает тесную связь между экспортом и импортом товаров или услуг, служит критерием оценки эффективности внешнеэкономической деятельности и уровня производства и, как следствие, инструментом подсчета сальдо платежного баланса страны, и многое другое.

С учетом вышеизложенного можно более емко охарактеризовать значение валютного курса как показателя цены денежной единицы одной страны, выраженной в денежной единице другой страны.

Актуальной научной задачей, предопределяющей исследовательскую цель данной статьи, является формирование инструментария определения величины и моделирования валютных курсов. Изучение, анализ и систематизация различных подходов и взглядов по поводу валютных курсов с позиции ранних и современных научных исследований позволили оценить вклад ученых в разработку проблем валютных курсов в системе экономического развития страны и выделить наиболее интересные и актуальные работы, которые послужили основой для формирования и развития научных решений автора в данной статье<sup>1</sup>.

## Основная часть

С целью формирования математического аппарата моделирования поведения курса валютных пар автором предложена аналогия физического процесса распространения упругих волн и экономических процессов<sup>2</sup>. При рассмотрении большого числа зависимостей было отмечено сходство результатов динамики валют с результатами сейсмических исследований, а именно — характерно быстрое изменение значений курса в неустойчивые периоды времени и быстрые изменения плотности среды (массива горных пород) в случае неустойчивости массива. Автором также было отмечено, что в случае ослабленных пород (то же для курса валюты) характерно повышенное значение на отдельных участках среднеквадратичного отклонения и снижение квадрата коэффициента корреляции в случае построения линий тренда.

1 Красавина Л. Н. Валютные проблемы инновационного развития экономики России // Деньги и кредит. — 2009. — № 6 [Электронный ресурс]. — Режим доступа: [www.cbr.ru/publ/main](http://www.cbr.ru/publ/main); Бункина М. К. Деньги. Банки. Валюта: Учебное пособие. — М.: ДИС, 2004. — 175 с.; Балацкий Е. В., Серебренникова А. В. Новые инструментальные императивы в моделировании валютных курсов // Вестник Московского университета. Серия «Экономика». — 2008. — № 5. — С. 15–24.; Григорьев К. А. Методические основы формирования валютного курса в условиях глобализации мировой экономики // Вестник ИНЖЭКОНА. Сер. Экономика. Вып. 3 (22). — СПб.: СПбГИЭУ, 2008. — С. 21–28.; Панилов М. А. Развитие теорий валютного курса и эволюция принципов его моделирования // Аудит и финансовый анализ. — 2009. — № 4. — С. 261–284.

2 Тихонов А. Н., Гончарский А. В., Степанов В. В., Ягола А. Г. Численные методы решения некорректных задач. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. литературы, 1990. — 232 с.; Алексеев А. С., Добринский В. И. Некоторые вопросы практического использования обратных динамических задач сейсмологии // Математические проблемы геофизики / АН СССР. Сиб. Отд-ния. ВЦ. — Новосибирск, 1975. — Вып. 6, ч. 2. — С. 7–53.; Владимиров В. С. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1981. — 512 с.

В связи с вышеизложенным является научная задача нахождения зависимости изменения курса одной валютной пары от другой, решение которой автором данной статьи предлагается строить путем доказательства теоремы о применимости уравнения Гельфанда-Левитана для курсов валют. Для этого сформулированы требования к входящим функциям, устранены неоднозначности в обозначениях, введены ограничения для модели.

Математическое моделирование позволяет сделать прогноз динамики второй валютной пары по первой, как в долгосрочной, так и краткосрочной перспективе.

В данной статье показан способ решения такого уравнения, для дальнейшего инструментального приложения.

Пусть регистрируемый валютный курс  $f(t) \in C^2 \mathbb{R}$  принадлежит классу функций с непрерывной второй производной и обратная к определяемому курсу  $\varphi(t) \in C^1 \mathbb{R}$  — классу функций с непрерывной первой производной, тогда если  $\frac{\partial f}{\partial \varphi} \leq F$ , т. е. ограничена, то указанные функции удовлетворяют интегральному уравнению Гельфанда-Левитана с начальным условием:  $\left. \frac{\partial U}{\partial x} \right|_{x=0} = c(+0)\delta(t)$ ,  $c(+0) = [2\varphi(0,0)]^1$ , где  $c(+0) = -f(+0)$

Задача связана с уравнением Гельфанда-Левитана

$$D_t^x \varphi(x,t) \equiv -1, |t| < x, \quad (1)$$

где

$$D_t^x \varphi(x,t) \equiv -2f(+0)\varphi(x,t) - \int_{-x}^x \varphi(x,s) \tilde{f}'(t-s) ds, \quad (2)$$

$\tilde{f}'(t)$  — производная четного продолжения функции  $\tilde{f}^+(t)$ , определенная в точках области существования ( $t \neq 0$ ).

$$\text{Для } T > 0 \quad (x \in (0,t), x < t < 2T-x) \quad (3)$$

Задача (25) эквивалентна при условии:

$$(D_f^x \varphi, \varphi) > 0, \forall \varphi \in L_2(-x,x), \forall x \in (0,T), \varphi \neq 0 \quad (4)$$

Т. е. решение обратной задачи (1-3) при условии (4) существует, единственно и связано либо с решением уравнения:

$$c(+0) = [2\varphi(0,0)]^1 \quad (5)$$

$$c(x) = \varphi(0,0) [2\varphi^2(x,x-0)]^1, \quad x \in [0,T] \quad (6)$$

либо получается явно при дробно-линейном преобразовании курса

$$f_1 \equiv \frac{\varepsilon(x) - \varepsilon(0)}{d - c} \quad (7)$$

Одномерная обратная задача исследована<sup>3</sup>. Однако нами была применена иная численная схема решения задачи. Задача была решена преобразованием Фурье уравнения (1-2):

$$F[\varphi(x,t)] + \frac{1}{2f(+0)} F[\varphi(x,t)] \cdot F[\tilde{f}'(t)] = F\left[\frac{1}{2f(+0)}\right] \quad (8)$$

$$\text{Откуда } F[\varphi(x,t)] = \frac{F\left[\frac{1}{2f(+0)}\right]}{\left(1 + \frac{1}{2f(+0)} F[\tilde{f}'(t)]\right)} \quad (9)$$

3 Гельфанд И. М., Левитан Б. М. Об определении дифференциального уравнения по его спектральной функции // Изв. АН СССР. Сер. Мат. — 1951. — Т. 15, — № 4. — С. 309–360.

### Рассчитанный курс доллар к рублю

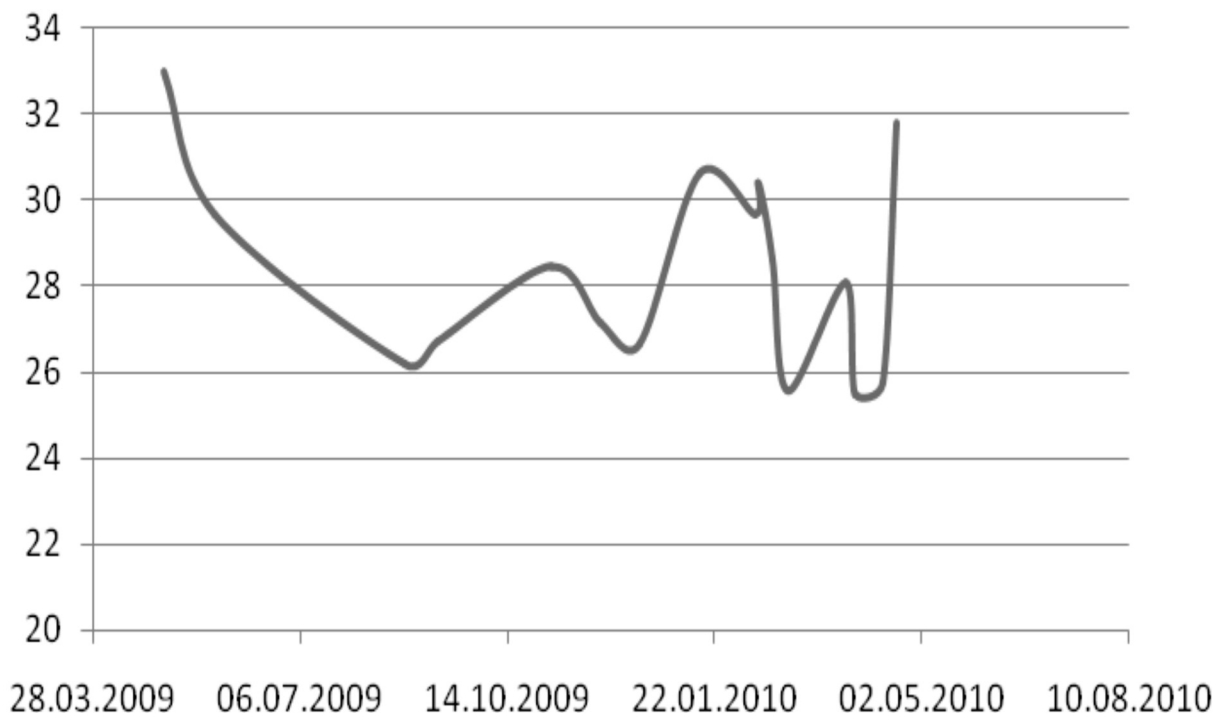


Рис. 1. Апробация использования метода преобразования Фурье на валютной паре евро\доллар по данным 2010 года

После применения обратного преобразование Фурье было получено:

$$\varphi(x_i, t) = F^{-1} \left\{ \frac{F\left[\frac{1}{2f(+0)}\right]}{\left(1 + \frac{1}{2f(+0)} F[\tilde{f}'(t)]\right)} \right\} \quad (10)$$

С учетом того, что:

$$F[\tilde{f}'(t)](\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}'(t) e^{-i\omega t} dt = \tilde{f}(t) e^{-i\omega t} \Big|_{-\infty}^{+\infty} - (-i\omega) \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(t) e^{-i\omega t} dt = i\omega F[\tilde{f}(t)](\omega)$$

было получено:

$$\varphi(x_i, t) = F^{-1} \left\{ \frac{F\left[\frac{1}{2f(+0)}\right](\omega)}{1 + \frac{i\omega}{2f(+0)} F[\tilde{f}(t)](\omega)} \right\} \quad (11)$$

Далее  $\varphi(x_i, t)$  надо подставить в формулу (9), где  $t = x_{i-1}$ .

Здесь под дискретным преобразованием Фурье понимается

$$\tilde{f}_m = \sum_{k=0}^{n-1} f_k e^{-i\omega_m X_k} = \sum_{k=0}^{n-1} f_k e^{-i2\pi(mk/n)} \quad (12)$$

где  $m=0, 1, \dots, n-1$ ;  $\omega_m = m\Delta\omega$ ,  $\Delta\omega = 2\pi/T$ ; а под дискретным обратным преобразованием Фурье:

$$f_k = \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} \tilde{f}_m e^{i\omega_m X_k} \quad (13)$$

где  $k=0, 1, \dots, n-1$ ; и под преобразованием Фурье свертки [10]:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left( \sum_{j=0}^{n-1} K_{k-j} z_j \Delta x \right) e^{-i\omega_m X_k} = \Delta x \tilde{z}_m \tilde{k}_m \quad (14)$$

При апробации метода на валютной паре евро\доллар по данным 2010 года (рис.1) ошибка долгосрочного прогноза не превосходила 6–10 % при доверительной вероятности 0,95.

С точки зрения вычислительной математики и математической физики способы решения одномерных уравнений Гельфанда-Левитана, являющихся параметрическим семейством интегральных уравнений типа свертки, достаточно разработаны. Для уравнений же типа свертки весьма эффективен метод преобразования Фурье, однако тонкость здесь заключается в выборе параметра регуляризации и определение условий единственности решения задачи.

### Выводы

Современная наука накопила большое количество теоретического материала и практического опыта экономико-математического моделирования процессов, прогнозирования, в том числе и в контексте проблематики валютных курсов. Практическое применение ведущих теорий валютных курсов на современном этапе экономического развития в России, наряду с математическим аппаратом, подобным используемому в данной работе, поможет решить важные задачи, предопределяющие потребности обеспечения устойчивого экономического роста, стабильности национальной валюты, повышение благосостояния населения.

В статье аргументированно доказано сходство результатов динамики валют с результатами сейсмических исследований, отмечено, что в случае ослабленных пород (то же для курса валюты) характерно повышенное значение на отдельных участках среднеквадратичного отклонения и снижение квадрата коэффициента корреляции в случае построения линий тренда. На основании этого найдена зависимость изменения курса одной валютной пары от другой, путем доказательства теоремы о применимости уравнения Гельфанда-Левитана для курсов валют.

Предложенное в данной статье научное решение проблемы моделирования поведения курса валютных пар позволяет формировать краткосрочные и долгосрочные прогнозы поведения валютных курсов на основании следующих исходных данных:

- 1) шаг по времени;
- 2) начальное значение параметра регуляризации, которое затем уточняется решением уравнения обобщенной невязки по Тихонову методом Ньютона;
- 3) погрешность задания правой части интегрального уравнения;
- 4) начальное значение вычисляемого 2-го валютного курса;
- 5) интервал поиска решения задачи для 2-го валютного курса.

### Список литературных источников

1. Алексеев А. С., Добринский В. И. Некоторые вопросы практического использования обратных динамических задач сейсмологии // Математические проблемы геофизики / АН СССР. Сиб. Отд-ния. ВЦ. — Новосибирск, 1975. — Вып.6, ч. 2. — С. 7–53.
2. Балацкий Е. В., Серебренникова А. В. Новые инструментальные императивы в моделировании валютных курсов // Вестник Московского университета. Серия «Экономика». — 2008. — № 5. — С. 15–24.
3. Бункина М. К. Деньги. Банки. Валюта: Учебное пособие. — М.: ДИС, 2004. — 175 с.
4. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1981. — 512 с.
5. Гельфанд И. М., Левитан Б. М.. Об определении дифференциального уравнения по его спектральной функции // Изв. АН СССР. Сер. Мат. — 1951. — Т.15, — № 4. — С. 309–360.
6. Григорьев К. А. Методические основы формирования валютного курса в условиях глобализации мировой экономики // Вестник ИНЖЭКОНА. Сер. Экономика. — Вып. 3 (22). — СПб.: СПбГИЭУ, 2008. — С. 21–28.
7. Кабанихин С. И. Проекционно-разностные методы определения коэффициентов гиперболических уравнений. — Новосибирск: Наука. Сиб. отд., 1988. — 166 с.
8. Красавина Л. Н. Валютные проблемы инновационного развития экономики России // Деньги и кредит. — 2009. — № 6 [Электронный ресурс]. — Режим доступа: [www.cbr.ru/publ/main](http://www.cbr.ru/publ/main)
9. Крейн М. Г. Решение обратной задачи Штурма-Лиувилля // Докл. АН СССР. — 1951. — Т. 76, № 1. — С. 21–24.
10. Мельников А. В., Волков С. Н., Нечаев М. Л. Математика финансовых обязательств. — М.: Государственный университет Высшая школа экономики, 2001. — 260 с.
11. Панилов М. А. Развитие теорий валютного курса и эволюция принципов его моделирования // Аудит и финансовый анализ. — 2009. — № 4. — С. 261–284.

12. Тихонов А. Н., Гончарский А. В., Степанов В. В., Ягола А. Г. Численные методы решения некорректных задач. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. литературы, 1990. — 232 с.
13. Тутубалин В. Н. Теория вероятностей и случайных процессов. — М., МГУ, 1992. — 395 с.
14. Ширяев А. Н. Основы стохастической финансовой математики. Том I. Факты и модели. — М.: Фазис, 1998. — 489 с.

### **Информация об авторе**

Лещев Владимир Владимирович; 08.00.13 — Математические и инструментальные методы экономики; соискатель; Институт системного анализа Российской академии наук; e-mail: [sergi1977@yandex.ru](mailto:sergi1977@yandex.ru)

## Leshchev Vladimir Vladimirovich

### Fourier transform and calculate efficiency of one currency pair on the second

#### Abstract

The article gives the solution of the Gelfand-Levitan equation for exchange rates, using the Fourier transform. The results are used to simulate the behavior of exchange rate of currency pairs.

#### Keywords

Exchange rates forecasting, the Gelfand-Levitan equation, Fourier transform, mathematical modeling.

#### Bibliography

1. Alekseev A. S., Dobrinsky V. I. Some questions of practical use of inverse dynamical problems of seismicity // *Mathematical problems of geophysics / Academy of Sciences of USSR. Siberian department.* – Novosibirsk, 1975. – Vol. 6, part 2. – P. 7–53.
2. Balatskij E. V., Serebrennikova A. V. New tool imperatives in exchange rate modeling // *Vestnik Moskovskogo universiteta. Economics series.* – 2008. – № 5. – P. 15–24.
3. Bunkina M. K. *Money. Banks. Currency: Textbook.* – Moscow: DIS, 2004. – 175 p.
4. Vladimirov V. S. *The equations of mathematical physics.* – M: Nauka, 1981. – 512 p.
5. Gelfand I. M., Levitan B. M. About the definition of the differential equation on its spectral function // *Izvestia AN SSSR. Mathematics series.* – 1951. – Vol. 15, – №4. – P. 309–360.
6. Grigoriev K. A. The methodical base of formation of the exchange rate in the conditions of world economy globalization // *Vestnik INZHEKONa. Economics series.* – Vol. 3 (22). – SPb.: SPbGIEU, 2008. – P. 21–28.
7. Kabanihin S. I. *Projectively-reductional methods of definition of the hyperbolic equations factors.* – Novosibirsk: Nauka. Siberian department., 1988. – 166 p.



8. Krasavina L. N. Currency problems of innovative development of Russia economy // *Dengi i credit.* – 2009. – № 6 [Electronic resource]. – Access mode: [www.cbr.ru/publ/main](http://www.cbr.ru/publ/main)
9. Crane M. G. The solving of a return problem of Shtorm-Liuivill // *Doklady AN SSSR.* – 1951. – Vol.76, №1. – P. 21–24.
10. Millers A. B., Volkov S. N., Nechaev M. L. *Mathematics of financial obligations.* – M: VSHE, 2001. – 260 p.
11. Panilov M. A. Development of theories of the exchange rate and evolution of principles of its modelling // *Audit i financovy analys.* – 2009. – №4. – P. 261–284.
12. Tihonov A. N., Goncharskij A. V., Stepanov V. V, Jagola A. G. *Numerical methods of the decision of incorrect problems.* – M: Nauka, 1990. – 232 p.
13. Tutubalin V. N.. *Probability theory and theory of casual processes.* – Moscow: MGU, 1992. – 395 p.
14. Shiryaev A. N. *The base of the stochastic financial mathematics. Volume I. The facts and models.* – M: Phasis, 1998. – 489 p.

### **Author's data**

Leschev Vladimir Vladimirovich; 08.00.13 – Mathematical and instrumental methods of economics; Candidate of Institute for Systems Analysis RAS; e-mail: [sergi1977@yandex.ru](mailto:sergi1977@yandex.ru)