

УДК 33

DOI: 10.34670/AR.2020.59.66.005

## Математическое моделирование зависимости качества окружающей среды от экономических параметров

**Перепелкина Юлианна Вячеславовна**

Кандидат физико-математических наук, доцент,  
кафедра высшей математики и естественно-научных дисциплин,  
Московский финансово-промышленный университет «Синергия»,  
125190, Российская Федерация, Москва, просп. Ленинградский, 80;  
e-mail: Amadeycity@yandex.ru

### Аннотация

В статье рассматриваются математические модели взаимосвязи состояния окружающей среды, техносферы и качества жизни человеческой цивилизации как целостной динамической системы. Особое внимание уделено системно-динамической модели некоторых тенденций мирового развития, непосредственно или косвенно влияющих на экологическую ситуацию, которая приводится в докладе по проекту Римского клуба «Сложное положение человечества». В результате проведенных аналитических преобразований автор делает вывод о том, что зависимость объема используемой энергии, несмотря на свою линейность, не дает прямо пропорционального функционального выражения от полезности, поскольку вызываемое техногенной активностью загрязнение окружающей среды приводит к возникновению отрицательной полезности. Вследствие этого для оценки и построения модели оптимального баланса ресурсов и факторов, необходимых для выживания человечества в мире, необходимо учитывать множество факторов из различных моделей экологической, экономической и социальной сфер.

### Для цитирования в научных исследованиях

Перепелкина Ю.В. Математическое моделирование зависимости качества окружающей среды от экономических параметров // Экономика: вчера, сегодня, завтра. 2020. Том 10. № 9А. С. 49-56. DOI: 10.34670/AR.2020.59.66.005

### Ключевые слова

Математическое моделирование, экономические параметры, окружающая среда, модель, динамическая система, экологическая ситуация, ресурс, фактор.

## Введение

Глобальные модели давно используются в качестве рабочего метода комплексного прогнозирования крупных проблем [Меншуткин, 2010]. С их помощью была выявлена острота демографической и, как следствие, техногенной напряженности в мире, угрожающая стабильности всей биосферы. В биосфере живые организмы и среда их обитания органически связаны и взаимодействуют друг с другом, образуя целостную динамическую систему. Методической основой глобального моделирования стал весь спектр современных направлений в математике и вычислительной технике – системная динамика Дж. Форрестера [Форрестер, 1971]. На основе теории систем, дифференциальных уравнений и компьютерного моделирования Дж. Форрестер разработал принципы и аппарат системной динамики, позволяющий анализировать работу системы и на этой основе принимать управленческие решения. В продолжение своих исследований Форрестер разработал модель мировой динамики World 2 (Мир-2) – модель городской динамики.

Представляет интерес системно-динамическая модель некоторых тенденций мирового развития, непосредственно или косвенно влияющих на экологическую ситуацию, которая приводится в докладе по проекту Римского клуба «Сложное положение человечества». Данная модель была разработана по совету и при поддержке известного специалиста в области системной динамики Джея У. Форрестера [Розенберг, 2004; Розенберг, 2013].

### Математическая модель влияния экономики на окружающую среду

Модель Форрестера построена по принципам системной динамики – метода изучения сложных систем с нелинейными обратными связями. Метод системной динамики предполагает, что для основных фазовых переменных (так называемых системных уровней) пишутся дифференциальные уравнения по одному и тому же типу.

Основные переменные модели: население, основные фонды, доля фондов в сельском хозяйстве (т.е. в отрасли обеспечения пищей), уровень загрязнения, количество невозобновляемых природных ресурсов. Форрестер ввел понятие о «качестве жизни» как факторе, который является мерой функционирования системы, то есть носит характер индикатора.

Модель Форрестера в первоначальном виде описывала мировой кризис вследствие истощения ресурсов. Согласно ей, сначала падает материальный уровень жизни, потом численность населения и капитал. Кризис наступает примерно к 2020–2030 гг. В модели все составляющие описываемого исследования – численность населения, производство продовольствия, загрязнение природной среды, расход невозобновимых ресурсов – растут [Forrester, 1968; Форрестер, 1974]. Каждый год они увеличиваются по закону в форме экспоненциального роста.

Рассмотрим модель Форрестера, в которой рассматривается вопрос об оптимальной траектории использования источника энергии.

Пусть  $S(t)$  обозначает запас топлива и  $E(t)$  – скорость извлечения топлива (и использования энергии) в любой момент времени  $t$ . Тогда мы имеем:

$$S^* = -E, \quad (1)$$

Использование энергии  $E$  дает возможность производить продукцию и услуги для потребления  $C$ , которое создает полезность, но также приводит к потоку загрязнения окружающей среды  $P$ , создающему отрицательную полезность.

Форрестер задает функцию потребления и функцию загрязнения следующим образом:

$$C = C(E), \quad (c' > 0, c'' < 0) \quad (2)$$

$$P = P(E), \quad (P' > 0, P'' > 0) \quad (3)$$

В этой модели предполагается, что загрязнение представляет собой поток, который рассеивается. Это подтверждается автоэмиссионным типом загрязнения.

Социальная функция полезности зависит от потребления и загрязнения

$$V = V(C, P),$$

$$\text{где } V_c > 0, V_p < 0, V_{cc} < 0, V_{pp} < 0, V_{cp} = 0.$$

Условия  $V_c > 0$  и  $V_{cc} < 0$  показывают, что предельная полезность потребления положительна, но убывает. Условия  $V_p < 0$  и  $V_{pp} < 0$  означают, что предельная полезность загрязнения отрицательная и убывает.

Так как обе переменные  $C$  и  $P$  зависят от  $E$ , то первым кандидатом на переменную управления является  $E$ . Только одна переменная  $S$  задается равенством (1) как производная. Отсюда следует, что  $S$  играет роль переменной состояния. Если министерство энергетики призвано планировать и составлять схему оптимальной траектории переменной использования энергии  $E$  в течение времени  $[0, T]$ , то задача динамической оптимизации может иметь вид:

$$\max_0 \int_0^T V(C(E), P(E)) dt \quad (5)$$

$$\text{при } \dot{S} = -E, \quad S(0) = S_0, \quad S(T) \geq 0, \quad \text{где } S_0, T \text{ заданы.}$$

Запишем гамильтониан задачи:

$$H = V(C(E), P(E)) - \lambda E, \quad (6)$$

который содержит нелинейные дифференцируемые функции  $V$ ,  $C$  и  $P$ .

Следовательно, мы можем максимизировать  $H$  по переменной управления, приравняв первую производную по  $E$  нулю:

$$\frac{\partial H}{\partial E} = V_c \cdot C'(E) + V_p P'(E) - \lambda = 0 \quad (7)$$

Чтобы убедиться, что условие (7) максимизирует гамильтониан, найдем вторую производную:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial E^2} = V_{cc} C'^2 + V_c \cdot C'' + V_{pp} P'^2 + V_p P'' < 0,$$

что следует из (2), (3) и (4).

Для получения большей информации о переменной  $E$  из (7) необходимо найти траекторию для  $\lambda$ . Из принципа максимума следует, что уравнение движения для  $\lambda$  имеет вид:

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial S} = 0 \Rightarrow \lambda(t) = const$$

Для определения константы мы можем обратиться к условию трансверсальности. Для данной задачи оно имеет вид:

$$\lambda(T) \geq 0, \quad S(T) \geq 0, \quad \lambda(T) \cdot S(T) = 0 \quad (8)$$

Полагая  $\lambda(t) = const = 0$ , мы упрощаем уравнение для переменной  $E$ :

$$V_c \cdot C'(E) + V_p \cdot P'(E) = 0 \quad (9)$$

Так как это уравнение не зависит от переменной  $t$ , то его решение постоянно во времени:

$$E^*(t) = E^*, \quad (10)$$

если  $\lambda^*(t) = 0$ .

Полезно выяснить экономический смысл уравнения (9). Первое слагаемое  $V_c \cdot C'(E)$  измеряет эффект изменения переменной  $V$  с изменением  $E$  через переменную  $C$ . То есть оно представляет предельную полезность используемой энергии через ее вклад и потребление. Аналогично, слагаемое  $V_p \cdot P'(E)$  выражает предельную бесполезность использования энергии через эффект загрязнения.

Согласно условию (10), министерство энергетики должно выбрать величину  $E^*$ , которая удовлетворяет предельную полезность и предельную бесполезность использования энергии.

Остается проверить, может ли  $E^*$  удовлетворить условию  $S(T) \geq 0$ . Для этой цели мы должны найти траекторию состояния  $S(t)$ . С постоянной энергией потребления уравнения движения  $\dot{S} = -E$  может быть проинтегрировано:

$$S(t) = -ET + k,$$

где  $k$  – произвольная постоянная.

При  $t = 0$  получим  $k = S_0$ . Следовательно, оптимальная траектория состояния может быть записана в виде:

$$S^*(t) = S_0 - E^* \cdot t \quad (11)$$

Проверим условия  $S(T) \geq 0$  качественно (рисунок 1).

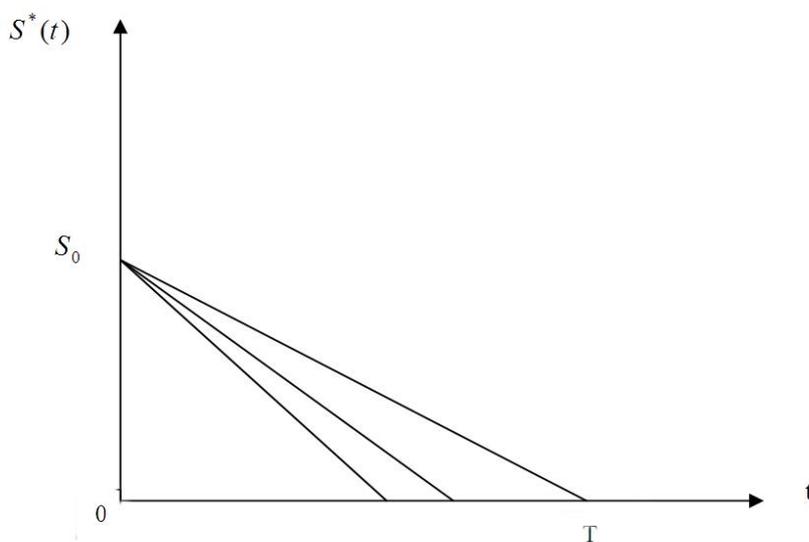


Рисунок 1

Если потребление энергии имеет низкий уровень  $E_1^*$ , то прямая  $S^*(t) = S_0 - E_1^*t$  наклонена над небольшим углом и  $S^*(T) > 0$ .

При более высокой скорости потребления энергии  $E_2^*$  имеем, как это видно из графика,  $S^*(T) = 0$ . В этом случае надо полагать  $S(T) = 0$ . Тогда

$$E^* = \frac{S_0}{T} \quad (12)$$

Этот случай иллюстрирован прямой  $S^*(t) = S_0 - E_2^* \cdot t$ .

### Заключение

Из проведенных аналитических преобразований можно сделать вывод о том, что зависимость объема используемой энергии, несмотря на свою линейность, не дает прямо

пропорционального функционального выражения от полезности, поскольку вызываемое техногенной активностью загрязнение окружающей среды приводит к возникновению отрицательной полезности. Вследствие этого для оценки и построения модели оптимального баланса ресурсов и факторов, необходимых для выживания человечества в мире, необходимо учитывать множество факторов из различных моделей экологической, экономической и социальной сфер.

### Библиография

1. Алферова Т.В., Третьякова Е.А. Концептуальное моделирование определения категории «устойчивое развитие» // Журнал экономической теории. 2012. № 4. С. 46-52.
2. Елагина А.С. Объективность оценки международных показателей доступности продовольствия: на примере Индекса глобальной продовольственной безопасности // Экономика: вчера, сегодня, завтра. 2019. Том 9. № 1В. С. 830-839.
3. Елагина А.С. Роль фермерских хозяйств в обеспечении доступности продовольствия В сборнике: Новое в науке и образовании. Сборник трудов Международной ежегодной научно-практической конференции. Составитель и ответственный редактор Ю.Н. Кондракова. 2019. С. 39-46.
4. Елагина А.С. Институциональные ограничения приоритетов современной политики продовольственного обеспечения РФ В сборнике: Новое в науке и образовании Сборник трудов Международной ежегодной научнопрактической конференции. Ответственный редактор Ю.Н. Кондракова. 2017. С. 25-31.
5. Елагина А.С. Правовая модель обеспечения продовольственной безопасности в России // Вопросы российского и международного права. 2016. Т. 6. № 11В. С. 153-160.
6. Елагина А.С. Глобальные политические процессы регулирования продовольственных рынков на принципах устойчивого развития // Теории и проблемы политических исследований. 2016. № 2. С. 89-97.
7. Елагина А.С. Принципы устойчивого развития при регулировании продовольственных рынков: обобщение международного опыта // Таврический научный обозреватель. 2015. № 4-3. С. 154-155.
8. Меншуткин В.В. Искусство моделирования (экология, физиология, эволюция). Петрозаводск; СПб.: Российская академия наук, 2010. 416 с.
9. Розенберг Г.С. Введение в теоретическую экологию. 2-е изд., исправ. и доп. Тольятти: Кассандра, 2013. Т. 1. 565 с., Т. 2. 445 с.
10. Розенберг Г.С. Лики экологии. Тольятти, 2004. 224 с.
11. Старкова М.М., Лютер Е.В., Гусарова Ю.В. Моделирование устойчивого развития промышленных отраслей // Вестник современной науки. 2016. № 10-1. С. 47-51.
12. Форрестер Д. Динамика развития города. М.: Прогресс, 1974. 288 с.
13. Форрестер Д. Основы кибернетики предприятия [Индустриальная динамика]. М.: Прогресс, 1971. 340 с.
14. Forrester J.W. Principles of Systems. Waltham (MA): Pegasus Communications, 1968. 387 p.
15. Gilbert N., Troitzsch K.G. Simulation for the Social Scientist. Second Edition. Maidenhead, Open University Press, 2005. 312 p.
16. Shapiro S.S., Wilk M.B. An Analysis of Variance Test for Normality (Complete Samples) // Biometrika. 1965. Vol. 52. No. 3/4. P. 591-611. doi: 10.2307/2333709.

### Mathematical modeling of dependence of environmental quality on economic parameters

**Yulianna V. Perepelkina**

PhD in Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,  
Department of higher mathematics and natural sciences,  
Moscow Financial and Industrial University "Synergy",  
125190, 80 Leningradskii av., Moscow, Russian Federation;  
e-mail: Amadeycity@yandex.ru

## Abstract

The article examines mathematical models of the relationship between the state of the environment, the technosphere and the quality of life of human civilization as an integral dynamic system. Particular attention is paid to the system-dynamic model of some trends in world development, directly or indirectly affecting the ecological situation, which is given in the report on the project of the Club of Rome "The Difficult Situation of Humanity". Forrester model is built on the principles of system dynamics – a method for studying complex systems with nonlinear feedbacks. The method of system dynamics assumes that differential equations of the same type are written for the main phase variables (the so-called system levels). As a result of the analytical transformations, the author concludes that the dependence of the amount of used energy, despite its linearity, does not give a directly proportional functional expression on utility, since environmental pollution caused by anthropogenic activity leads to negative utility. As a result, to assess and build a model for the optimal balance of resources and factors necessary for the survival of humanity in the world, it is necessary to take into account many factors from various models of the ecological, economic and social spheres.

## For citation

Perepelkina Yu.V. (2020) Matematicheskoe modelirovanie zavisimosti kachestva okruzhayushchei sredy ot ekonomicheskikh parametrov [Mathematical modeling of dependence of environmental quality on economic parameters]. *Ekonomika: vchera, segodnya, zavtra* [Economics: Yesterday, Today and Tomorrow], 10 (9A), pp. 49-56. DOI: 10.34670/AR.2020.59.66.005

## Keywords

Mathematical modeling, economic parameters, environment, model, dynamic system, ecological situation, resource, factor.

## References

1. Alferova T.V., Tret'yakova E.A. (2012) Kontseptual'noe modelirovanie opredele-niya kategorii "ustoichivoe razvitie" [Conceptual modeling of the definition of the category of "sustainable development"]. *Zhurnal ekonomicheskoi teorii* [Journal of Economic Theory], 4, pp. 46-52.
2. Elagina A.S. (2019) Ob"yektivnost' otsenki mezhdunarodnykh dostupnosti prodovol'stviya: na primere Indeksa global'noy prodovol'stvennoy bezopasnosti [Objectivity in assessing international food availability: case of the Global Food Security Index]. *Ekonomika: vchera, segodnya, zavtra* [Economics: Yesterday, Today and Tomorrow], 9 (1B), pp. 830-839.
3. Elagina A. S. (2019) The Role of farms in ensuring the availability of food in the collection: New in science and education. Proceedings of the International annual scientific and practical conference. The composer and responsible editor Yu. N. Every. Pp. 39-46.
4. Elagina A. S. (2017) Institutional limitations of priorities of modern food security policy of the Russian Federation in the collection: New in science and education proceedings Of the International annual scientific and practical conference. Responsible editor Yu. N. Every. Pp. 25-31.
5. Elagina A.S. (2016) Pravovaya model' obespecheniya prodovol'stvennoi bezopasnosti v Rossii [Legal model of ensuring food security in Russia]. *Voprosy rossiiskogo i mezhdunarodnogo prava* [Matters of Russian and International Law], 6 (11B), pp. 153-160.
6. Elagina A.S. (2016) Global'nye politicheskie protsessy regulirovaniya prodovol'stvennykh rynkov na printsipakh ustoichivogo razvitiya [Global political processes of food market regulation on the principles of sustainable development]. *Teorii i problemy politicheskikh issledovaniy* [Theory and Problems of Political Studies], 2, pp. 89-97.
7. Elagina A.S. (2015) Principles of sustainable development in the regulation of food markets: a synthesis of international experience Tavrichesky Scientific Observer. № 4-3. Pp. 154-155.
8. Forrester D. (1971) *Osnovy kibernetiki predpriyatiya* [Industrial'naya dinamika] [Fundamentals of enterprise cybernetics [Industrial dynamics]]. Moscow: Progress Publ.

9. Forrester D. (1974) *Dinamika razvitiya goroda* [Dynamics of city development]. Moscow: Progress., 288 c.
10. Forrester J.W. (1968) *Principles of Systems*. Waltham (MA): Pegasus Communications .
11. Gilbert N., Troitzsch K.G. (2005) *Simulation for the Social Scientist*. Second Edition. Maidenhead, Open University Press.
12. Menshutkin V.V. (2010) *Iskusstvo modelirovaniya (ekologiya, fiziologiya, evolyu-tsiya)* [The art of modeling (ecology, physiology, evolution).]. Petrozavodsk; Saint Petersburg: Russian Academy of Sciences.
13. Rozenberg G.S. (2004) *Liki ekologii* [Ecology faces]. Tol'yatti.
14. Rozenberg G.S. (2013) *Vvedenie v teoreticheskuyu ekologiyu* [Introduction to theoretical ecology]. 2nd ed. Tol'yatti: Kassandra Publ.
15. Shapiro S.S., Wilk M.B. (1965) An Analysis of Variance Test for Normality (Complete Samples). *Biometrika*, 52 (3/4), pp. 591-611. doi: 10.2307/2333709.
16. Starkova M.M., Lyuter E.V., Gusarova Yu.V. (2016) Modelirovanie ustoichivogo razvitiya promyshlennykh otraslei [Modeling of sustainable development of industrial sectors]. *Vestnik sovremennoi nauki* [Bulletin of modern science], 10-1, pp. 47-51.