УДК 33 **DOI: 10.34670/AR.2022.95.31.006**

Задача оптимального управления ресурсами

Губарева Елена Алексеевна

Кандидат физико-математических наук, доцент,
кафедра математики и информатики,
Государственный университет управления,
109542, Российская Федерация, Москва, Рязанский пр., 99;
e-mail: gubel@inbox.ru

Нольде Евгений Львович

Кандидат физико-математических наук, доцент,
кафедра математики и информатики,
Государственный университет управления,
109542, Российская Федерация, Москва, Рязанский пр., 99;
e-mail: elnolde@yandex.ru

Аннотация

Как известно, любая деятельность в области экономики и управления предполагает выбор наилучшего (оптимального) решения из всех возможных вариантов действия. Для достижения этой цели обсудим некоторые возможности использования для принятия решений научных методов, в частности, математических моделей и методов. Сразу стоит отметить, что очень часто решение задач, разных по поставленным целям, с точки зрения математики строится на основе вполне стандартных методов и алгоритмов решения. К таким задачам относятся и так называемые оптимизационные задачи. Обсуждаются возможности использовать математические модели и методы для принятия оптимального решения из всех возможных вариантов действия. Задача оптимального управления ресурсами рассматривается как гладкая оптимизационная задача с ограничениями в виде равенств и (или) неравенств. Предлагается общий алгоритм для решения задачи нахождения оптимального распределения средств на закупку ресурсов, обеспечивающее фирме получение максимально возможной прибыли. Представленный алгоритм предлагает решение задачи с привлечением аппарата дифференциального исчисления. Особое внимание уделено задаче построения множества производственных возможностей, которое определяется ограничением средств, которыми располагает фирма для закупки ресурсов. Центральное место при решении этой задачи занимает модель, известная как «ящик Эджворта». Для производственных функций определенного вида (симметричных) поставленная задача решена в явном виде.

Для цитирования в научных исследованиях

Губарева Е.А., Нольде Е.Л. Задача оптимального управления ресурсами // Экономика: вчера, сегодня, завтра. 2022. Том 12. № 2А. С. 49-59. DOI: 10.34670/AR.2022.95.31.006

Ключевые слова

Оптимизационная задача, распределение ресурсов, ящик Эджворта, производственная функция, линия контрактов, множество производственных возможностей.

Введение

Как известно, любая деятельность в области экономики и управления предполагает выбор наилучшего (оптимального) решения из всех возможных вариантов действия. Для достижения этой цели обсудим некоторые возможности использования для принятия решений научных методов, в частности, математических моделей и методов. Сразу стоит отметить, что очень часто решение задач, разных по поставленным целям, с точки зрения математики строится на основе вполне стандартных методов и алгоритмов решения. К таким задачам относятся и так называемые оптимизационные задачи.

Традиционно оптимизационную задачу формализуют следующим образом: минимизировать (максимизировать) целевой функционал, вид которого определяется конкретной задачей, с учетом заданных ограничений на управляемые переменные:

$$F(x_1; x_2; ....; x_n) \to \inf (\sup),$$
$$(x_1; x_2; ....; x_n) \subset U.$$

С точки зрения математического инструментария, используемого при решении, все задачи нахождения оптимального решения можно разбить на четыре группы [Алексеев, 1979]: гладкие задачи, задачи классического вариационного исчисления, задачи выпуклого программирования (в частности задачи линейного программирования) и задачи оптимального управления.

Задачу оптимального управления ресурсами можно отнести к гладким задачам, то есть задачам, в которых цель исследования может быть представлена в виде гладкой функции, а ограничения в виде равенств и (или) неравенств:

$$f(x_1; x_2; ....; x_n) \to \inf (\sup),$$
$$\begin{cases} \varphi_i(x_1; x_2; ....; x_n) = 0, \\ \phi_i(x_1; x_2; ....; x_n) \le 0. \end{cases}$$

Основная часть

Формализуем следующую задачу. Пусть предприятие выпускает два вида продукции в количествах x и y соответственно, используя два вида ресурсов (оборудования) K и L. Известны производственные функции, определяющие объемы выпуска продукции в зависимости от объемов использованных ресурсов: $x = f_x(K, L)$ и $y = f_y(K, L)$, а $\pi(x, y)$ – прибыль, которую получит предприятие за фиксированный срок. Тогда задача может быть формализована следующим образом:

$$\pi(x,y) \to \max$$
$$\begin{cases} x \ge 0, \quad y \ge 0, \\ x = f_x(K_x, L_x), \\ y = f_y(K_y, L_y), \\ p_k\left(K_x + K_y\right) + p_l\left(L_x + L_y\right) \le M. \end{cases} \qquad (1)$$

Здесь M – объем денежных средств, которыми располагает предприятие для закупки ресурсов, p_K и p_L – цены на соответствующие ресурсы (оборудование), (K_x, L_x) – объемы ресурсов, используемые для выпуска продукции первого вида, а (K_y, L_y) – объемы ресурсов, используемые для выпуска продукции второго вида. Если границу множества, заданного системой, удастся описать аналитически $F(x,y)=0$, то мы получим классическую задачу нахождения наибольшего значения функции на ограниченном замкнутом множестве

$$\pi(x,y) \to \max$$
$$\begin{cases} x \ge 0, \quad y \ge 0, \\ F(x,y) \le 0, \end{cases} \qquad (1^*)$$

для решения которой можно использовать хорошо изученные методы исследования на глобальный экстремум функции нескольких переменных (например, метод множителей Лагранжа или градиентный метод [Лебедев, 2002]). Для получения уравнения границы $F(x,y)=0$ бывает возможным также использовать методы нахождения оптимальных решений. При этом центральное место в такой задаче занимает модель «ящик Эджворта» [там же]:

$$f_y(K_y, L_y) \to \max$$
$$\begin{cases} K_x \ge 0, \; L_x \ge 0, \\ f_x(K_x, L_x) = X_0, \\ K_x + K_y = K_0, \\ L_x + L_y = L_0. \end{cases} \qquad (2)$$

То есть необходимо определить максимально возможный объем выпуска продукции второго вида, если объем выпуска продукции первого вида фиксирован $f_x(K_x, L_x) = X_0$, а объемы используемых ресурсов ограничены K_0 и L_0 соответственно ($p_K K_0 + p_L L_0 = M$). На рисунке представлена геометрическая иллюстрация «ящика Эджворта».

Точка $M_0(K_x^*, L_x^*)$, определяющая максимальный объем выпуск продукции второго вида, если объем первой продукции фиксирован, является точкой касания изоквант $f_x(K_x, L_x) = X_0$ и $f_y(K_y, L_y) = const$. При этом K_x^* и L_x^* соответствующие объемы ресурсов, используемые для выпуска продукции первого вида в объеме X_0, а $K_0 - K_x^*$ и $L_0 - L_x^*$ объемы ресурсов, используемые для выпуска продукции второго вида в объеме Y_{max}.

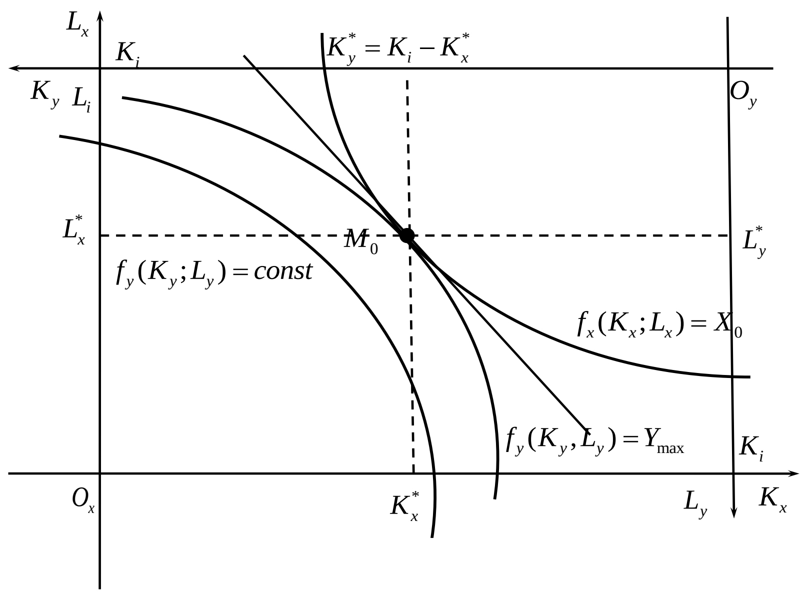

Рисунок 1 - Геометрическая иллюстрация «ящика Эджворта»

Координаты точки $M_0(K_x^*, L_x^*)$ находятся из системы уравнений:

$$\begin{cases} K_x \ge 0,\ L_x \ge 0, \\ f_x(K_x, L_x) = X_0, \\ \dfrac{\frac{\partial f_x}{\partial K_x}}{\frac{\partial f_x}{\partial L_x}} = \dfrac{\frac{\partial f_y}{\partial K_y}}{\frac{\partial f_y}{\partial L_y}}, \\ L_x + L_y = L_0, \\ K_x + K_y = K_0. \end{cases} \qquad (3)$$

Если для каждого значения X_0 из промежутка $[0; f_x(L_0, K_0)]$ найти значение $Y_{max} = f_y(K_0 - K_x^*, L_0 - L_x^*)$, то получим кривую $F_0(x, y) = 0$, которая будет являться границей множества производственных возможностей ограниченных использованием ресурсов в объемах K_0 и L_0 соответственно. Отметим, что все точки касания $M_0(K_x^*, L_x^*)$ образуют так называемую линию контрактов, которая задается последними тремя уравнениями системы (3).

Используя эту модель для каждой фиксированной пары значений K_i и L_i, таких, что выполняется условие $p_K K_i + p_L L_i = M$:

$$\begin{cases} K_x \ge 0,\ L_x \ge 0, \\ f_x(K_x, L_x) = X_0, \\ \dfrac{\dfrac{\partial f_x}{\partial K_x}}{\dfrac{\partial f_x}{\partial L_x}} = \dfrac{\dfrac{\partial f_y}{\partial K_y}}{\dfrac{\partial f_y}{\partial L_y}}, \\ L_x + L_y = L_i, \\ K_x + K_y = K_i, \end{cases}$$

можно построить множество производственных возможностей, то есть задать кривую $F_i(x,y)=0$, его ограничивающую.

Кривая $F(x,y)=0$ (граница множества, заданного системой (1)) является огибающей всех кривых $F_0(x,y)=0$.

Для заданных конкретных производственных функций $x = f_x(K,L)$ и $y = f_y(K,L)$ уравнения, задающие условия касания указанных изоквант, позволяют найти точку касания и решить поставленную задачу.

Вернемся к базовой задаче (2). Положим $a = x_{\max} = f_x(K_0, L_0)$, $b = y_{\max} = f_y(K_0, L_0)$.

Введем новые переменные s и t: $s = \dfrac{K}{K_0},\ t = \dfrac{L}{L_0}$. Выразим $x = f_x(K,L)$ и $y = f_y(K,L)$ через переменные s и t. Для этого положим $W_1(s,t) = \dfrac{f_x(sK_0, tL_0)}{a}$, а $W_2(s,t) = \dfrac{f_y(sK_0, tL_0)}{b}$. Тогда $x = aW_1(s,t)$, а $y = bW_2(s,t)$.

В новых обозначениях задача (2) формулируется следующим образом:

$$W_2(1-s, 1-t) \to \max$$
$$\begin{cases} s \in [0;1],\ t \in [0;1], \\ W_1(s,t) = \dfrac{X_0}{a}, \end{cases}$$

то есть надо найти точку касания линий $W_1(s,t) = \dfrac{X_0}{a}$ и $W_2(1-s, 1-t) = const$.

Рассмотрим функции выпуска $f(K,L)$, которые удовлетворяют следующим условиям:

– $f(0,L) = f(K,0) = 0$,

– функции $f(K,L)$ монотонно возрастают по каждому аргументу,

– линии уровня этих функций выпуклы вниз,

– функции $f(K,L)$ таковы, что введенные функции $W_i(s,t)$ симметричны, то есть $W_i(s,t) = W_i(t,s)$. Самыми простыми примерами таких функций являются функции видов $W(s,t) = h(st)$ и $W(s,t) = h(s)h(t)$. В частности, производственные функции вида $f(K,L) = A(KL)^{\alpha}$ будут удовлетворять этим условиям.

В новых координатах «ящик Эджворта», используемый для решения задачи, будет являться единичным квадратом на плоскости sOt. Для рассматриваемых производственных функций линии уровня функций $W_1(s,t)$ и $W_2(1-s,1-t)$ симметричны относительно диагонали этого квадрата, и следовательно, пересекают диагональ под прямым углом. Если линии уровня функций $W_1(s,t)$ и $W_2(1-s,1-t)$ проходят через одну точку на диагонали квадрата, то они касаются в этой точке. Так как из условия выпуклости линий уровня следует, что не может быть других точек касания, то можно сделать вывод, что все точки касания линий уровня функций $W_1(s,t)$ и $W_2(1-s,1-t)$ находятся на диагонали единичного квадрата, то есть уравнение линии контрактов $t = s$.

В каждой точке (s,s) на диагонали квадрата вычислим значения двух функций $x = aW_1(s,s)$ и $y = bW_2(1-s,1-s)$. Соответствующие этим значениям линии уровня функций касаются в этой точке. Если положить $H_1(s) = W_1(s,s)$ а $H_2(s) = W_2(s,s)$, то система уравнений

$$\begin{cases} x = aH_1(s), \\ y = bH_2(1-s) \end{cases}$$

будет задавать границу множества производственных возможностей параметрически.

Функции $H_1(s)$ и $H_2(s)$ непрерывны, возрастают на отрезке $[0;1]$ и принимают все значения из отрезка $[0;1]$. Поэтому существуют обратные к функциям $H_1(s)$ и $H_2(s)$ функции H_1^{-1} и H_2^{-1} соответственно. Чтобы задать уравнение границы множества производственных возможностей в виде $F_0(x,y) = 0$ надо из системы параметрических уравнений исключить параметр s.

Для этого преобразуем систему следующим образом:

$$\begin{cases} x = aH_1(s), \\ y = bH_2(1-s) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{a} = H_1(s), \\ \dfrac{y}{b} = H_2(1-s) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} s = H_1^{-1}\left(\dfrac{x}{a}\right), \\ 1-s = H_2^{-1}\left(\dfrac{y}{b}\right) \end{cases} \Rightarrow H_1^{-1}\left(\dfrac{x}{a}\right) + H_2^{-1}\left(\dfrac{y}{b}\right) = 1.$$

Итак, уравнение границы множества производственных возможностей для базовой задачи (2) имеет вид:

$$H_1^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + H_2^{-1}\left(\frac{y}{b}\right) = 1 \qquad (4)$$

Это означает, что множество производственных возможностей определяется системой:

$$\begin{cases} H_1^{-1}\left(\dfrac{x}{a}\right) + H_2^{-1}\left(\dfrac{y}{b}\right) \le 1, \\ x \ge 0, \quad y \ge 0, \end{cases}$$

то есть представляет собой область первой четверти, ограниченную линией, заданной уравнением $H_1^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + H_2^{-1}\left(\frac{y}{b}\right) = 1$.

Соответственно для каждой пары (K_i, L_i) такой, что выполняется условие $p_K K_i + p_L L_i = M$, описанным выше способом можно получить множество производственных возможностей, ограниченное линией $H_1^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + H_2^{-1}\left(\frac{y}{b}\right) = 1$ с параметрами $a = f_x(K_i, L_i)$ и $b = f_y(K_i, L_i)$.

Рассмотрим задачу об определении множества производственных возможностей, если ограничения на ресурсы имеют вид: $p_K K + p_L L \le M$. Величины a и b в формуле (4) определяют размеры линии (по аналогии с полуосями эллипса). При увеличении параметров a и b множество производственных возможностей расширяется. При ограничении $p_K K + p_L L = M$ надо решить еще одну оптимизационную задачу:

$$\begin{array}{ll} a \to \max & f_x(K_i, L_i) \to \max \\ \begin{cases} K_i \ge 0, \quad L_i \ge 0, \\ p_K K_i + p_L L_i = M \end{cases} \Leftrightarrow & \begin{cases} K_i \ge 0, \quad L_i \ge 0, \\ p_K K_i + p_L L_i = M. \end{cases} \end{array} \qquad (5)$$

Найденные величины $K^*,\ L^*$ будут играть роль $K_0,\ L_0$ для базовой задачи (2). Они определяют объемы ресурсов, которые надо закупить на средства в объеме M, чтобы иметь возможность получить максимально возможную прибыль, так как решение задачи (1*) находится на линии $F(x, y) = 0$, уравнение которой для рассматриваемых производственных функций будет иметь вид

$$H_1^{-1}\left(\frac{x}{f_x(K^*, L^*)}\right) + H_2^{-1}\left(\frac{y}{f_y(K^*, L^*)}\right) = 1. \qquad (6)$$

Отметим, что для большинства задач (но не всегда) в точке $\left(K^*,\ L^*\right)$ достигает максимума и величина b. В частности, это выполняется, если функции выпуска $x = f_x(K, L)$ и $y = f_y(K, L)$ пропорциональны, то есть $W_1(s,t) = W_2(s,t)$. Последним этапом решения задачи (1*) будет нахождение объемов ресурсов: $K_x^*,\ K_y^*$ ($K_x^* + K_y^* = K^*$) и $L_x^*,\ L_y^*$ ($L_x^* + L_y^* = L^*$), используемых для получения оптимального выпуска $\left(X_{опт}, Y_{опт}\right)$, то есть выпуска, обеспечивающего максимально возможную прибыль. Точка с координатами $\left(X_{опт}, Y_{опт}\right)$ является точкой касания линии (6) и линии постоянной прибыли $\pi(x, y) = const$. Оптимальное распределение ресурсов между видами продукции можно найти из системы

$$\begin{cases} f_x(K_x^*, L_x^*) = X_{опт}, \\ f_y(K_y^*, L_y^*) = Y_{опт}, \\ K_x^* + K_y^* = K^*, \\ L_x^* + L_y^* = L^*. \end{cases} \qquad (7)$$

Заключение

Таким образом, можно выстроить следующий алгоритм решения задачи оптимального управления ресурсами.

1 шаг. Решаем задачу (5), чтобы определить объемы закупок ресурсов.

2 шаг. Решаем задачу

$$\pi(x,y) \to \max$$
$$\begin{cases} x \geq 0, \quad y \geq 0, \\ H_1^{-1}\left(\dfrac{x}{f_x(K^*,L^*)}\right) + H_2^{-1}\left(\dfrac{y}{f_y(K^*,L^*)}\right) = 1. \end{cases}$$

Получаем оптимальные объемы выпуска $\left(X_{опт}, Y_{опт}\right)$.

3 шаг. Решая задачу (7) определяем объемы ресурсов, используемые для обеспечения выпуска в объемах $X_{опт}$ и $Y_{опт}$ соответственно, которые и обеспечат фирме максимально возможную прибыль.

В то время как третий шаг алгоритма предполагает решение системы с двумя переменными K_x^* и L_x^*:

$$\begin{cases} f_x(K_x^*, L_x^*) = X_{опт}, \\ f_y(K^* - K_x^*, L^* - L_x^*) = Y_{опт}, \end{cases}$$

то для реализации первых двух шагов алгоритма необходимо использовать методы дифференциального исчисления, а именно, методы нахождения условного экстремума функции многих переменных. Для гладких производственных функций можно применить метод множителей Лагранжа и (или) градиентный метод [Губарева и др., 2021].

Библиография

1. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. М.: Наука, 1979. 429 с.
2. Губарева Е.А., Паршикова Г.Ю. О задачах оптимизации в экономике // Синергетика в естественных науках. Тверь, 2010. 234 с.
3. Губарева Е.А. и др. Математика и экономика. Часть 2. Оптимизационные задачи. М., 2021. 59 с.
4. Лебедев В.В., Лебедев К.В. Математическое и компьютерное моделирование экономики. М.: НТВ-Дизайн, 2002. 256 с.
5. Sodhro A. H. et al. Towards an optimal resource management for IoT based Green and sustainable smart cities //Journal of Cleaner Production. – 2019. – Т. 220. – С. 1167-1179.
6. Rajput R. S., Pant A. Optimal resource management in the cloud environment-a review //International Journal of Converging Technologies and Management (IJCTM). – 2018. – Т. 4. – №. 1. – С. 12-24.
7. Liu L. N., Yang G. H. Distributed Fixed-Time Optimal Resource Management for Microgrids //IEEE Transactions on Automation Science and Engineering. – 2022.
8. Ningombam D. D., Shin S. Optimal resource management and binary power control in network-assisted D2D communications for higher frequency reuse factor //Sensors. – 2019. – Т. 19. – №. 2. – С. 251.
9. Abrol P., Gupta S. Social spider foraging-based optimal resource management approach for future cloud //The Journal of Supercomputing. – 2020. – Т. 76. – №. 3. – С. 1880-1902.
10. Zafari F. Optimal resource management in communication networks: theory and algorithm designs : дис. – Imperial College London, 2020.

Optimal resource management problem

Elena A. Gubareva

PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor,
Department of Mathematics and Informatics,
State University of Management,
109542, 99, Ryazanskii ave., Moscow, Russian Federation;
e-mail: gubel@inbox.ru

Evgenii L. Nol'de

PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor,
Department of Mathematics and Informatics,
State University of Management,
109542, 99, Ryazanskii ave., Moscow, Russian Federation;
e-mail: elnolde@yandex.ru

Abstract

Any activity in the field of economics and management involves the choice of the best (optimal) solution from all possible options for action. To achieve this goal, we will discuss some possibilities of using scientific methods for decision making, in particular, mathematical models and methods. It should be noted right away that very often the solution of problems that differ in their goals, from the point of view of mathematics, is based on quite standard methods and solution algorithms. These problems include the so-called optimization problems. The possibilities of using mathematical models and methods for making decisions are discussed. The problem of optimal resource management is considered as a smooth optimization problem with constraints in the form of equalities and (or) inequalities. A general algorithm is proposed for solving the problem of finding the optimal allocation of funds for the purchase of resources, which provides the company with the maximum possible profit. The presented algorithm offers a solution to the problem using the apparatus of differential calculus. Particular attention is paid to the problem of constructing a set of production possibilities, which is determined by the limitation of the funds available to the firm for the purchase of resources. Central to this problem is the model known as the "Edgworth box". For production functions of a certain type (symmetric), the problem is solved explicitly.

For citation

Gubareva E.A., Nol'de E.L. (2022) Zadacha optimal'nogo upravleniya resursami [Optimal resource management problem]. *Ekonomika: vchera, segodnya, zavtra* [Economics: Yesterday, Today and Tomorrow], 12 (2A), pp. 49-59. DOI: 10.34670/AR.2022.95.31.006

Keywords

Optimization problem, resource allocation, Edgeworth box, production function, line of contracts, set of production possibilities.

References

1. Alekseev V.M., Tikhomirov V.M., Fomin S.V. (1979) *Optimal'noe upravlenie* [Optimal control]. Moscow: Nauka Publ.
2. Gubareva E.A. et al. (2021) *Matematika i ekonomika. Chast' 2. Optimizatsionnye zadachi* [Mathematics and Economics. Part 2. Optimization problems]. Moscow.
3. Gubareva E.A., Parshikova G.Yu. (2010) O zadachakh optimizatsii v ekonomike [On optimization problems in economics]. In: *Sinergetika v estestvennykh naukakh* [Synergetics in natural sciences]. Tver.
4. Lebedev V.V., Lebedev K.V. (2002) *Matematicheskoe i komp'yuternoe modelirovanie ekonomiki* [Mathematical and computer modeling of the economy]. Moscow: NTV-Dizain Publ.
5. Sodhro, A. H., Pirbhulal, S., Luo, Z., & De Albuquerque, V. H. C. (2019). Towards an optimal resource management for IoT based Green and sustainable smart cities. Journal of Cleaner Production, 220, 1167-1179.
6. Rajput, R. S., & Pant, A. (2018). Optimal resource management in the cloud environment-a review. International Journal of Converging Technologies and Management (IJCTM), 4(1), 12-24.
7. Liu, L. N., & Yang, G. H. (2022). Distributed Fixed-Time Optimal Resource Management for Microgrids. IEEE Transactions on Automation Science and Engineering.
8. Ningombam, D. D., & Shin, S. (2019). Optimal resource management and binary power control in network-assisted D2D communications for higher frequency reuse factor. Sensors, 19(2), 251.
9. Abrol, P., & Gupta, S. (2020). Social spider foraging-based optimal resource management approach for future cloud. The Journal of Supercomputing, 76(3), 1880-1902.
10. Zafari, F. (2020). Optimal resource management in communication networks: theory and algorithm designs (Doctoral dissertation, Imperial College London).