

УДК 519.87

DOI: 10.34670/AR.2023.54.73.117

**Полумарковская модель функционирования  
системы приема данных с полярно-орбитальных  
спутников дистанционного зондирования  
земли: экономические аспекты**

**Заморёнов Михаил Вадимович**

Кандидат технических наук, доцент,  
Севастопольский государственный университет,  
299053, Российская Федерация, Севастополь, ул., Университетская, 33;  
e-mail: zamoryonoff@gmail.com

**Дымченко Ирина Вячеславовна**

Старший преподаватель,  
Севастопольский государственный университет,  
299053, Российская Федерация, Севастополь, ул., Университетская, 33;  
e-mail: ivdymchenko@sevsu.ru

**Сырых Ольга Анатольевна**

Старший преподаватель,  
Севастопольский государственный университет,  
299053, Российская Федерация, Севастополь, ул., Университетская, 33;  
e-mail: oasyrykh@sevsu.ru

**Аннотация**

В данной работе авторами рассмотрен процесс функционирования системы приема данных дистанционного зондирования Земли в момент захвата и сопровождения спутника – поставщика данных. Построена полумарковская модель системы. Найдены времена пребывания системы в состояниях. Определены вероятности переходов системы. Найдено стационарное распределение вложенной цепи Маркова. При использовании метода путей получены выражения для определения функций и плотностей распределения случайных величин – времен пребывания системы в подмножествах состояний. Приведен пример расчета математических ожидание найденных в работе функций распределения случайных величин. Проведено сравнение результатов моделирования с помощью теоремы о среднестационарном времени пребывания системы в состояниях.

**Для цитирования в научных исследованиях**

Заморёнов М.В., Дымченко И.В., Сырых О.А. Полумарковская модель функционирования системы приема данных с полярно-орбитальных спутников дистанционного зондирования земли: экономические аспекты // Экономика: вчера, сегодня, завтра. 2023. Том 13. № 5А. С. 792-801. DOI: 10.34670/AR.2023.54.73.117

**Ключевые слова**

Полумарковская система, вложенная цепь Маркова, метод путей, геоданные, данные дистанционного зондирования, система приема данных, спутник.

**Введение**

Геоданные являются одним из важных инновационных ресурсов, которые существенно повышают эффективность функционирования практически всех отраслей экономики и общественной жизни.

Одним из источников геоданных являются спутниковые системы дистанционного зондирования Земли, передающие данные в наземный сегмент системы, при попадании в зону его приема. Состав спутников, данные которых может принимать такая станция, определяется ее программным обеспечением (лицензиями на прием информации). Планирование приема данных с полярно-орбитальных спутников может осуществляться как в ручном, так и в автоматическом режиме. В случае автоматического режима приема данных, при попадании спутников в зону приема наземного сегмента, происходит захват появившегося в зоне приема станции спутника, его сопровождение и прием данных. Достаточно часто в зоне приема оказывается не один спутник. Одна наземная станция приема, как правило, не может одновременно принять данные более чем с одного спутника, в этом случае происходит потеря данных второго спутника.

**Основная часть**

Если необходимо получить данные с обоих спутников, то требуется размещение двух станции приема или дооснащение имеющейся дополнительным оборудованием, позволяющим одной станции приема принимать данные с нескольких спутников одновременно.

Учитывая высокую стоимость оборудования решение о дооснащении или доукомплектовании должно быть обосновано в первую очередь с экономической точки зрения.

Опираясь на выше сказанное, можно заключить, что в современных реалиях необходима методика (модель, аппарат), которая станет основой расчета экономической эффективности спутниковой системы приема данных.

В данной статье предлагается с использованием аппарата полумарковских процессов рассмотреть процесс функционирования спутниковой системы приема данных, рассчитанной на единовременное сопровождение одного спутника. Следует отметить, что, учитывая необходимость строго позиционирования в начале сопровождения, система не может мгновенно после окончания сопровождения и приема данных от одного спутника переключиться на сопровождение другого, находящегося в данный момент в зоне приема.

Рассмотрим функционирование такой системы. Считается, что спутники во время такта функционирования появляются по очереди, но не более двух. Время появления первого спутника  $\alpha_1$ , является случайной величиной, имеющей функцию  $F_1(t)$  распределения. Время появления второго спутника  $\alpha_2$ , является случайной величиной, имеющей функцию  $F_2(t)$  распределения. Времена сопровождения каждого из спутников  $\beta_1$  и  $\beta_2$  соответственно, также являются случайными величинами, имеющими функции распределения  $G_1(t)$  и  $G_2(t)$ .

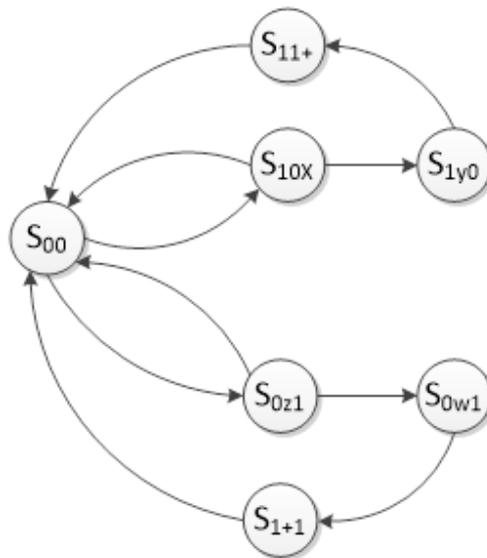
Система приема сопровождает спутник, получая от него полезные данные. Причем начинается сопровождение первого пришедшего спутника. Если во время сопровождения одного спутника на горизонте появляется второй, то такая ситуация приводит к потере данных со второго спутника. После окончания сопровождения система переводится в ждущий режим и только после этого готова к сопровождению следующего.

СВ  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\beta_1$  и  $\beta_2$  предполагаются независимыми, имеющими конечные математические ожидания и дисперсии; у функций распределения  $F_1(t)$ ,  $F_2(t)$ ,  $G_1(t)$  и  $G_2(t)$  существуют плотности  $f_1(t)$ ,  $f_2(t)$ ,  $g_1(t)$  и  $g_2(t)$ .

Функционирование такой системы описывается полумарковским процессом со следующим множеством состояний:

$$E = \{S_{00}, S_{10x}, S_{10y}, S_{11+}, S_{0z1}, S_{0w1}, S_{1+1}\}$$

Граф переходов системы изображен на рисунке 1.



**Рисунок 1 – Граф переходов системы**

Расшифруем содержательный смысл кодов состояний:

$S_{00}$  – система слежения находится в готовности, ожидает спутники;

$S_{10x}$  – первый спутник сопровождается, до прихода второго спутника осталось время  $x > 0$ ;

$S_{10y}$  – окончено сопровождение первого спутника, система в состоянии готовности, до прихода второго спутника осталось время  $y > 0$ ;

$S_{11+}$  – начато сопровождение второго спутника

$S_{0z1}$  – второй спутник сопровождается, до прихода первого спутника осталось время  $z > 0$

$S_{0w1}$  – окончено сопровождение второго спутника, система в состоянии готовности, до прихода первого спутника осталось время  $w > 0$ ;

$S_{1+1}$  – начато сопровождение первого спутника

Разделим состояния системы на два подмножества (обеспечивающее прием данных  $E_+$  и состояния ожидания простоя  $E_-$ ) состояний:

$$E_{+=} \{S_{10x}, S_{11+}, S_{0z1}, S_{1+1}\}, E_{-} = \{S_{00}, S_{10y}, S_{0w1}\}.$$

Причем

$$E = E_+ \cap E_-$$

Необходимо определить функции распределения времен пребывания системы в подмножествах.

Времена пребывания в состояниях:

$$\theta_{00} = \alpha_1 \wedge \alpha_2;$$

$$\theta_{10x} = \beta_1;$$

$$\theta_{10y} = y$$

$$\theta_{11+} = \beta_2$$

$$\theta_{0z1} = \beta_2;$$

$$\theta_{0w1} = w;$$

$$\theta_{1+1} = \beta_1,$$

где  $x = [\alpha_2 - \alpha_1]^+$  – разность двух случайных величин  $\alpha_2$  и  $\alpha_1$  при условии, что  $\alpha_2 > \alpha_1$ ,  $y = [x - \beta_1]^+$  – разность двух случайных величин  $x$  и  $\beta_1$  при условии, что  $x > \beta_2$ ,  $z = [\alpha_1 - \alpha_2]^+$  – разность двух случайных величин  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  при условии, что  $\alpha_1 > \alpha_2$ ,  $w = [z - \beta_2]^+$  – разность двух случайных величин  $z$  и  $\beta_2$  при условии, что  $z > \beta_2$ .

Используя [5, 10], определим функции распределения  $x, y, z, w$  – разностей двух случайных величин при условии, что первая больше второй:

$$F_x(t) = \frac{\int_0^{\infty} [F_2(t+x) - F_2(x)] f_1(t) dt}{\int_0^{\infty} [1 - F_2(x)] f_1(t) dt}$$

$$F_y(t) = \frac{\int_0^{\infty} [F_x(t+x) - F_x(x)] g_1(t) dt}{\int_0^{\infty} [1 - F_x(x)] g_1(t) dt}$$

$$F_z(t) = \frac{\int_0^{\infty} [F_1(t+x) - F_1(x)] f_2(t) dt}{\int_0^{\infty} [1 - F_1(x)] f_2(t) dt}$$

$$F_w(t) = \frac{\int_0^{\infty} [F_z(t+x) - F_z(x)] g_2(t) dt}{\int_0^{\infty} [1 - F_z(x)] g_2(t) dt}$$

Теперь найдем функции распределения времен пребывания в состояниях:

$$F_{00}(t) = 1 - \bar{F}_1(t) \bar{F}_2(t),$$

$$F_{10x}(t) = G_1(t),$$

$$F_{10y}(t) = F_y(t),$$

$$F_{11+}(t) = G_2(t),$$

$$F_{0z1}(t) = G_2(t),$$

$$F_{0w1}(t) = F_w(t),$$

$$F_{1+1}(t) = G_1(t).$$

Опишем вероятности переходов:

$$P_{10y}^{11+} = P_{11+}^{00} = P_{0w1}^{1+1} = P_{1+1}^{00} = 1;$$

$$P_{00}^{10x} = \int_0^{\infty} \bar{F}_2(x) f_1(t) dt;$$

$$P_{00}^{0z1} = \int_0^{\infty} \bar{F}_1(x) f_2(t) dt;$$

$$P_{10x}^{00} = \int_0^{\infty} F_x(x) g_1(t) dt;$$

$$P_{10x}^{10y} = \int_0^{\infty} \bar{F}_x(x) g_1(t) dt;$$

$$P_{0z1}^{00} = \int_0^{\infty} F_z(x) g_2(t) dt;$$

$$P_{0z1}^{0w1} = \int_0^{\infty} \bar{F}_z(x) g_2(t) dt.$$

Для получения искомых характеристик необходимо воспользоваться стационарным распределением вложенной цепи Маркова, для чего требуется составить и решить систему уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_{00} = \rho_{10x} P_{10x}^{00} + \rho_{11+} + \rho_{0z1} P_{0z1}^{00} + \rho_{1+1} \\ \rho_{10x} = \rho_{00} P_{00}^{10x} \\ \rho_{10y} = \rho_{10x} P_{10x}^{10y} \\ \rho_{11+} = \rho_{10y} \\ \rho_{0z1} = \rho_{00} P_{00}^{0z1} \\ \rho_{0w1} = \rho_{0z1} P_{0z1}^{0w1} \\ \rho_{1+1} = \rho_{0w1} \end{array} \right.$$

Для корректного нахождения решения используется уравнение нормировки:

$$\rho_{00} + \rho_{10x} + \rho_{10y} + \rho_{11+} + \rho_{0z1} + \rho_{0w1} + \rho_{1+1} = 1$$

В ходе решения получаем:

$$\rho_{00} = \frac{1}{2 + 2(P_{00}^{10x} P_{10x}^{10y} + P_{00}^{0z1} P_{0z1}^{0w1})}$$

Используя метод путей [11], определим плотности распределения  $f_+(t)$  и  $f_-(t)$  времен пребывания системы в подмножествах  $E_+$  и  $E_-$ :

$$\begin{aligned} f_+(t) &= \frac{\rho_{10x}}{\rho_{10x} + \rho_{11+} + \rho_{0z1} + \rho_{1+1}} \cdot f_{10x}(t) + \frac{\rho_{11+}}{\rho_{10x} + \rho_{11+} + \rho_{0z1} + \rho_{1+1}} \cdot f_{11+}(t) + \\ &+ \frac{\rho_{0z1}}{\rho_{10x} + \rho_{11+} + \rho_{0z1} + \rho_{1+1}} \cdot f_{0z1}(t) + \frac{\rho_{1+1}}{\rho_{10x} + \rho_{11+} + \rho_{0z1} + \rho_{1+1}} \cdot f_{1+1}(t) \\ f_-(t) &= \frac{\rho_{00}}{\rho_{00} + \rho_{10y} + \rho_{0w1}} \cdot f_{00}(t) + \frac{\rho_{10y}}{\rho_{00} + \rho_{10y} + \rho_{0w1}} \cdot f_{10y}(t) + \\ &+ \frac{\rho_{0w1}}{\rho_{00} + \rho_{10y} + \rho_{0w1}} \cdot f_{0w1}(t) \end{aligned}$$

Рассмотрим пример моделирования такой системы с известными параметрами распределения случайных величин.

Исходными данными для моделирования служат функции распределения  $F_1(t)$ ,  $F_2(t)$ ,  $G_1(t)$ ,  $G_2(t)$  они распределены по обобщенному закону Эрланга второго порядка с параметрами:

$$\lambda_{11} = 0,1333 \text{ ч}^{-1}, \lambda_{12} = 0,4000 \text{ ч}^{-1};$$

$$\lambda_{21} = 0,1111 \text{ ч}^{-1}, \lambda_{22} = 0,3333 \text{ ч}^{-1};$$

$$\mu_{11} = 0,6667 \text{ ч}^{-1}, \mu_{12} = 2,0 \text{ ч}^{-1}.$$

$$\mu_{21} = 0,6667 \text{ ч}^{-1}, \mu_{22} = 2,0 \text{ ч}^{-1}.$$

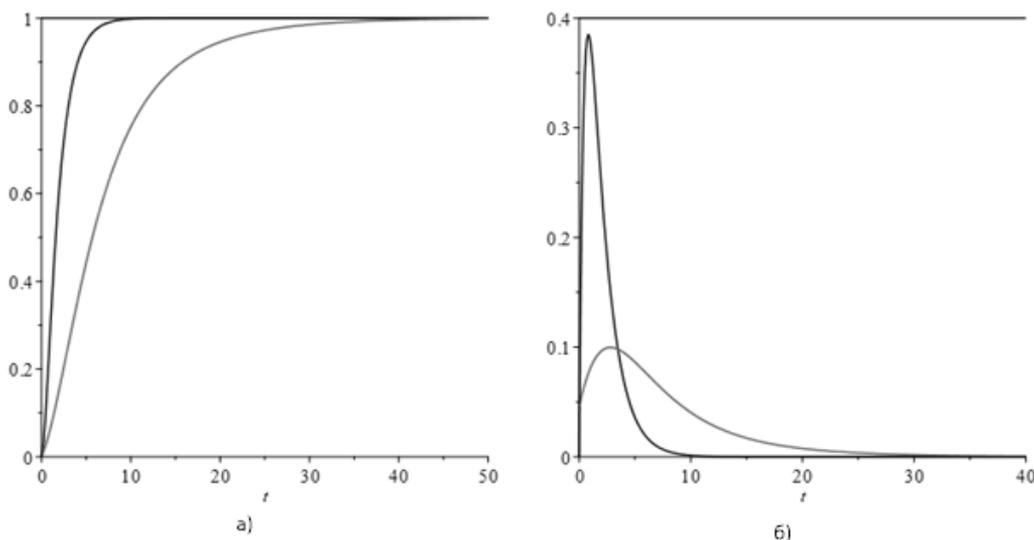
На рисунке 2 приведена искомые функции  $F_+(t)$  и  $F_-(t)$  и плотности  $f_+(t)$  и  $f_-(t)$  распределения, полученные в данной работе.

Сравним значения математического ожидания полученной нами функции и математического ожидания, определяемого на основании теоремы о среднем стационарном времени пребывания полумарковского процесса в подмножестве состояний:

$$T_+ = \frac{\sum_{i \in E_+} m_i \rho_i}{\sum_{k \in K \subseteq E_+} \sum_{j \in E_-} P_{kj} \rho_i} \quad (1)$$

Математическое ожидание найденных нами плотностей распределения  $f_+(t)$  и  $f_-(t)$ , составляет 2.00000 ч. и 7.54365 ч. соответственно, тогда как, определяемые с помощью выражения (1) – 1.99999 ч. и 7.54365 ч.

Нетрудно констатировать, что математические ожидания практически совпадают.



**Рисунок 2 – Вид ФР (а) и ПР (б) времени пребывания системы в подмножествах  $E_+$  и  $E_-$**

### Заключение

Проведенное сравнение математических ожиданий времен пребывания в подмножестве состояний приема данных, полученных на основании найденной в работе функции распределения и на основании теоремы о среднем стационарном времени пребывания полумарковского процесса в подмножестве состояний, показало правильность полученных результатов.

В дальнейших исследованиях планируется построение более сложных моделей взаимодействия спутниковых систем приема данных с различным количеством спутником, а также проведение верификации аналитических моделей посредством проведения имитационных экспериментов.

### Библиография

1. Цветков В.Я. Геоданные и геопространственные данные. Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. – 2016. – № 3-3. – С. 502-503.
2. Фарутин И. Н., Федоткин Д. И. Технологические решения компании СканЭкс для приема и обработки спутниковой информации. Интерэкспо Гео-Сибирь. 2011. Пленарное заседание. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/tehnologicheskie-resheniya-kompanii-skaneks-dlya-priema-i-obrabotki-sputnikovoy-informatsii>.
3. Бухарицин А.П. Состояние и перспективы развития рынка услуг по сбору и обработке спутниковых данных дистанционного зондирования Земли. Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. – 2021. – № 3. – С. 85-91.
4. Бухарицин А.П. Проблемы оценки эффективности технологий дистанционного зондирования земли из космоса. Фундаментальные исследования. – 2021. – № 9. – С. 12-20.

5. Королюк В.С., Турбин А.Ф. Процессы марковского восстановления в задачах надежности систем. Киев: Наукова думка, 1982. 236 с.
6. Королюк В.С. Стохастические модели систем. Отв. ред. А.Ф. Турбин. Киев: Наукова думка, 1989. 208 с.
7. Королюк В.С. Суперпозиция процессов марковского восстановления. Кибернетика. 1981. №4. С. 121 – 124.
8. Королюк В.С. Полумарковские процессы и их приложения. В.С. Королюк, А.Ф. Турбин. К.: Наук. Думка, 1976. – 181 с.
9. Peschansky A.I. Semi-Markov Models of One-Server Loss Queues with Recurrent Input. Germany: LAP LAMPERT Academic Publishing, 2013. 138 p.
10. Копп В.Я. Стохастические модели автоматизированных производственных систем с временным резервированием. В.Я. Копп, Ю.Е. Обжерин, А.И. Песчанский. Севастополь: Изд-во СевНТУ, 2000. 284 с.
11. Загорёнов М.В., Копп В.Я., Филипович О.В., Загорёнова Д.В. Моделирование структуры "ячейка-накопитель" методом путей при абсолютно надежном накопителе. Известия Тульского государственного университета. Технические науки. Тула: Изд-во ТулГУ. 2016. № 11-2. С. 10-20.

## **Semi-Markov model of functioning of the system for receiving data from polar-orbiting earth remote sensing satellites: economic aspects**

**Mikhail V. Zamorenov**

PhD in Technical Sciences, Associate Professor,  
Sevastopol State University,  
299053, 33, st. Universitetskaya, Sevastopol, Russian Federation;  
e-mail: zamoryonoff@gmail.com

**Irina V. Dymchenko**

Senior Lecturer  
Sevastopol State University,  
299053, 33, st. Universitetskaya, Sevastopol, Russian Federation;  
e-mail: ivdymchenko@sevsu.ru,

**Ol'ga A. Syrykh**

Senior Lecturer  
Sevastopol State University,  
299053, 33, st. Universitetskaya, Sevastopol, Russian Federation;  
e-mail: oasyrykh@sevsu.ru,

### **Abstract**

In this paper, the authors consider the process of functioning of the system for receiving data from remote sensing of the Earth at the time of capture and tracking of a satellite - a data provider. A semi-Markov model of the system is constructed. The sojourn times of the system in the states are found. The probabilities of system transitions are determined. The stationary distribution of the embedded Markov chain is found. When using the method of paths, expressions are obtained for determining the functions and distribution densities of random variables - the times the system spends in subsets of states. An example of calculating the mathematical expectation of the distribution functions of random variables found in the work is given. The simulation results are compared using the theorem on the average stationary time of the system's stay in states.

**For citation**

Zamorenov M.V., Dymchenko I.V., Syrykh O.A. (2023) Polumarkovskaya model' funkcionirovaniya sistemy priema dannykh s polyarno-orbital'nykh sputnikov distantsionnogo zondirovaniya zemli: ekonomicheskie aspekty [Semi-Markov model of functioning of the system for receiving data from polar-orbiting earth remote sensing satellites: economic aspects]. *Ekonomika: vchera, segodnya, zavtra* [Economics: Yesterday, Today and Tomorrow], 13 (5A), pp. 792-801. DOI: 10.34670/AR.2023.54.73.117

**Keywords**

Semi-Markov system, nested Markov chain, path method, geodata, remote sensing data, data receiving system, satellite.

**References**

1. Tsvetkov V.YA. Geodannyye i geoprostranstvennyye dannyye. *Mezhdunarodnyy zhurnal prikladnykh i fundamental'nykh issledovaniy*. – 2016. – № 3-3. – S. 502-503.
2. Farutin I. N., Fedotkin D. I. Tekhnologicheskiye resheniya kompanii SkanEks dlya priyema i obrabotki sputnikovoy informatsii. *Interespo Geo-Sibir'*. 2011. Plenarnoye zasedaniye. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/tehnologicheskiye-resheniya-kompanii-skaneks-dlya-priyema-i-obrabotki-sputnikovoy-informatsii>.
3. Bukharitsin A.P. Sostoyaniye i perspektivy razvitiya rynka uslug po sboru i obrabotke sputnikovyykh dannykh distantsionnogo zondirovaniya Zemli. *Mezhdunarodnyy zhurnal prikladnykh i fundamental'nykh issledovaniy*. – 2021. – № 3. – S. 85-91.
4. Bukharitsin A.P. Problemy otsenki effektivnosti tekhnologiy distantsionnogo zondirovaniya zemli iz kosmosa. *Fundamental'nyye issledovaniya*. – 2021. – № 9. – S. 12-20.
5. Korolyuk V.S., Turbin A.F. *Processy markovskogo vosstanovleniya v zadachah nadezhnosti sistem*. Kiev: Naukova dumka, 1982. 236 s.
6. Korolyuk V.S. *Stohasticheskie modeli sistem*. Otv. red. A.F. Turbin. Kiev: Naukova dumka, 1989. 208 s.
7. Korolyuk V.S. Superpozitsiya processov markovskogo vosstanovleniya. *Kibernetika*. 1981. №4. S. 121 – 124.
8. Korolyuk V.S. Polumarkovskie processy i ih prilozheniya. V.S. Korolyuk, A.F. Turbin. K.: Nauk. Dumka, 1976. – 181 s.
9. Peschansky A.I. *Semi-Markov Models of One-Server Loss Queues with Recurrent Input*. Germany: LAP LAMPERT Academic Publishing, 2013. 138 p.
10. Kopp V.YA *Stohasticheskie modeli avtomatizirovannykh proizvodstvennykh sistem s vremennym rezervirovaniem*. V.YA. Kopp, YU.E. Obzherin, A.I. Peschanskij. Sevastopol': Izd-vo SevNTU, 2000. 284 s.
11. Zamoryonov M.V., Kopp V.YA., Filipovich O.V., Zamoryonova D.V. Modelirovanie struktury "yachejka-nakopitel" metodom putej pri absolyutno nadezhnom nakopitele. *Izvestiya Tul'skogo gosudarstvennogo universiteta. Tekhnicheskie nauki*. Tula: Izd-vo TulGU. 2016. № 11-2. S. 10-20.