

УДК 336.763**DOI: 10.34670/AR.2026.38.89.050**

**Влияние нелинейных моделей стохастической волатильности с
прыжками на оценку справедливой стоимости экзотических
 опционов и управление риском в условиях переменной
 ликвидности**

Успаева Милана Гумкиевна

Кандидат экономических наук, доцент,
 Кафедра финансов, кредита и антимонопольного регулирования,
 Чеченский государственный университет им. А.А. Кадырова,
 364906, Российская Федерация, Грозный, ул. Киевская, 33;
 e-mail: mguspaeva@mail.ru

Гачаев Ахмед Магомедович

Доцент,
 Кафедра высшей и прикладной математики,
 Грозненский государственный нефтяной
 технический университет им. акад. М.Д. Миллионщика, 364051, Российская Федерация, Грозный, пр. Исаева, 100;
 e-mail: Gachaev-chr@mail.ru

Аннотация

В работе исследуется влияние усложнения модельной структуры — перехода от классической модели Блэка-Шоулза-Мертона к моделям стохастической волатильности с прыжками и стохастической ликвидности — на оценку справедливой стоимости экзотических опционов и управление риском в условиях переменной ликвидности. На высокочастотных данных по опционам на индекс S&P 500 и индексу волатильности VIX за 2007—2023 гг. проведена калибровка моделей Блэка-Шоулза, Хестона, Бейтса и предложенной нелинейной модели с двойным экспоненциальным распределением прыжков и коррелированным процессом ликвидности. Для эталонного набора барьерных, азиатских и цифровых опционов выполнено численное ценообразование методом Монте-Карло с техниками снижения дисперсии и последующая оценка ошибок ценообразования, греков (Δ , Γ , Вега, Волга), показателей VaR/CVaR и совокупных издержек дельта-хеджирования при разных режимах ликвидности. Показано, что модель Блэка-Шоулза может занижать стоимость барьерных опционов до 14—15%, тогда как нелинейная модель с прыжками и ликвидностью практически устраняет систематическую ошибку, повышает реалистичность оценок хвостовых рисков (VaR и CVaR на 50—90% выше по сравнению с классической моделью) и позволяет учесть имплицитную премию за ликвидность и рост транзакционных издержек в стрессовых режимах рынка. Полученные результаты подтверждают, что явный учет стохастической ликвидности и нелинейной динамики волатильности является необходимым условием корректного ценообразования и построения робастных стратегий хеджирования портфелей экзотических опционов.

Для цитирования в научных исследованиях

Успаева М.Г., Гачаев А.М. Влияние нелинейных моделей стохастической волатильности с прыжками на оценку справедливой стоимости экзотических опционов и управление риском в условиях переменной ликвидности // Экономика: вчера, сегодня, завтра. 2025. Том 15. № 11А. С. 350-360. DOI: 10.34670/AR.2026.38.89.050

Ключевые слова

Экзотические опционы, стохастическая волатильность, модели с прыжками, рыночная ликвидность, справедливая стоимость, Value-at-Risk, Conditional Value-at-Risk, дельта-хеджирование, барьерные опционы, управление рисками, финансовая математика.

Введение

В современной финансовой парадигме, характеризующейся беспрецедентной сложностью и взаимосвязанностью рынков, адекватная оценка стоимости производных финансовых инструментов и управление сопутствующими рисками становятся краеугольным камнем устойчивости как отдельных инвестиционных портфелей, так и глобальной финансовой системы. Особое место в этом ландшафте занимают экзотические опционы, чья нелинейная структура выплат делает их чрезвычайно чувствительными к динамике базовых активов и параметрам ценообразования. По данным Банка международных расчетов, совокупный условный объем внебиржевых деривативов на конец 2023 года превысил 700 трлн долларов США, причем доля сложных и экзотических контрактов неуклонно растет, достигая, по некоторым оценкам, 15-20% от общего объема опционного рынка [Арясова, 2022]. Это свидетельствует о высоком спросе на кастомизированные инструменты хеджирования и спекуляций.

Классическая модель Блэка-Шоулза-Мертона, заложившая основы современного опционного ценообразования, базируется на ряде упрощающих допущений, таких как постоянство волатильности, логнормальное распределение доходностей и отсутствие транзакционных издержек. Эмпирические исследования, однако, убедительно демонстрируют несостоятельность этих предпосылок [Мандрица, Жумалакова, 2022]. Финансовые рынки характеризуются кластеризацией волатильности, эффектом «кривой улыбки» (*implied volatility smile*), а также наличием «тяжелых хвостов» в распределении доходностей, что указывает на более высокую вероятность экстремальных событий, чем предполагает нормальное распределение. Игнорирование этих стилизованных фактов приводит к систематическим ошибкам в ценообразовании. Например, в периоды высокой турбулентности, как во время кризиса 2008 года или пандемии COVID-19, расхождения в ценах на опционы «вне денег» между моделью Блэка-Шоулза и рыночными котировками могли достигать 30-40% [Намитулина, Куцюри, 2022].

Для преодоления ограничений классического подхода были разработаны модели стохастической волатильности, среди которых наиболее известной является модель Хестона [Биккулов, Разакова, 2023]. Она позволяет волатильности самой быть случайным процессом, что объясняет феномен «улыбки волатильности». Однако и она неспособна адекватно описывать резкие, скачкообразные движения цен, вызванные неожиданными новостями или кризисными явлениями. Для этого в модель были добавлены компоненты скачков (*jumps*), что

привело к созданию моделей типа Бейтса или Мертона с прыжками [Мкртумян, Аджиев, 2022]. Эти модели значительно улучшили соответствие теоретических цен рыночным, особенно для краткосрочных опционов. Тем не менее, стандартные модели с прыжками и стохастической волатильностью все еще предполагают линейные зависимости и, что более важно, абстрагируются от реалий рыночной микроструктуры, в частности, от переменной ликвидности. В условиях рыночного стресса ликвидность может резко сокращаться, что приводит к увеличению транзакционных издержек и проскальзыванию при исполнении хеджирующих сделок. Этот фактор способен кардинально изменить как справедливую стоимость опциона, так и профиль риска связанного с ним портфеля [Агафонова, Аганов, Марков, 2025]. Таким образом, возникает острая научная и практическая необходимость в разработке и исследовании нелинейных моделей стохастической волатильности с прыжками, которые явным образом включают в себя стохастический процесс ликвидности, для более точной оценки и эффективного управления рисками экзотических опционов.

Материалы и методы исследования

Настоящее исследование базируется на комплексном подходе, сочетающем теоретическое моделирование, эконометрический анализ и численное моделирование методом Монте-Карло. Теоретической основой работы послужили фундаментальные труды в области финансового инжиниринга и стохастического анализа. В качестве отправных точек были использованы канонические модели: модель Блэка-Шоулза-Мертона как бенчмарк, модель стохастической волатильности Хестона и модель стохастической волатильности с логнормальными прыжками Бейтса. Основной же фокус исследования направлен на разработку и анализ расширенной нелинейной модели, которая интегрирует в себя стохастическую волатильность, пуассоновский процесс прыжков с двойным экспоненциальным распределением амплитуды и, что является ключевым нововведением, стохастический процесс ликвидности. Последний моделируется как процесс с возвратом к среднему, коррелирующий как с процессом волатильности (отражая эмпирический факт снижения ликвидности при росте волатильности), так и с процессом цены базового актива [Ильина, 2023].

Эмпирической базой для калибровки моделей и проведения симуляций послужили высокочастотные данные по опционам на индекс S&P 500 (SPX) и данные по индексу волатильности VIX, полученные с Чикагской биржи опционов (CBOE). Временной горизонт исследования охватывает период с января 2007 года по декабрь 2023 года, что позволяет включить в анализ различные рыночные режимы: предкризисный период, финансовый кризис 2008 года, период количественного смягчения, пандемию COVID-19 и последующий период высокой инфляции и ужесточения монетарной политики. Выборка включает в себя ежедневные котировки на закрытие по более чем 500 000 опционных контрактов с различными страйками и сроками до экспирации. Для оценки параметров ликвидности использовались внутридневные данные о спредах и объемах торгов по фьючерсам на индекс S&P 500 [Ощепков, Томашова, 2024].

Методология исследования включала несколько ключевых этапов. На первом этапе производилась калибровка каждой из рассматриваемых моделей (Блэка-Шоулза, Хестона, Бейтса и предложенной нелинейной модели с прыжками и стохастической ликвидностью) на рыночные данные. Для этого использовался метод минимизации средневзвешенной квадратичной ошибки между модельными и рыночными ценами опционов. В качестве весов

выступали значения веги для каждого опциона, чтобы придать больший вес контрактам, наиболее чувствительным к параметрам волатильности [Аджиева, Тылик, 2022]. На втором этапе, с использованием откалиброванных параметров, проводилось ценообразование набора эталонных экзотических опционов (барьерные, азиатские, цифровые) с помощью симуляций Монте-Карло с применением техник снижения дисперсии, таких как антитетические переменные и контрольные переменные. Было сгенерировано по 1 миллиону траекторий для каждого расчета, чтобы обеспечить высокую точность оценок [[Мануйленко, Галазова, 2025]].

На третьем этапе осуществлялся комплексный анализ рисков. Для портфеля, состоящего из базового актива и короткой позиции по экзотическому опциону, рассчитывались ключевые греки (Дельта, Гамма, Вега) и их динамика в рамках каждой модели. Особое внимание уделялось оценке хвостовых рисков с помощью показателей Value-at-Risk (VaR) и Conditional Value-at-Risk (CVaR) на 99% уровне доверия. Эти показатели рассчитывались как на основе симуляций, так и с помощью исторического моделирования для верификации [Бахирева, Семернина, 2022]. Кроме того, моделировались затраты на динамическое дельта-хеджирование с учетом переменной ликвидности, что позволило оценить влияние транзакционных издержек на конечный финансовый результат. Общий объем проанализированной научной литературы, включая монографии, академические статьи и рабочие документы ведущих финансовых институтов, составил более 70 источников. Инструментарий исследования включал программные пакеты MATLAB для численного моделирования и калибровки, а также Python с библиотеками Pandas и NumPy для обработки данных [Намитулина, 2022].

Результаты и обсуждение

Центральной задачей данного исследования является количественная оценка влияния усложнения модельной структуры на точность ценообразования экзотических опционов и адекватность оценки рисков. Для наглядной демонстрации этого влияния был проведен сравнительный анализ результатов, полученных с помощью четырех моделей различной степени сложности. Выбор конкретных показателей для анализа обусловлен их критической важностью для практикующих трейдеров и риск-менеджеров. Во-первых, это непосредственная ошибка ценообразования по сравнению с наблюдаемыми или эталонными рыночными ценами, так как неверная оценка справедливой стоимости ведет к прямым финансовым потерям. Во-вторых, это чувствительность к волатильности (Вега) и ее производные, поскольку управление риском волатильности является ключевым элементом в торговле опционами [Гайфулина, 2024]. В-третьих, это метрики хвостового риска (VaR и CVaR), которые характеризуют потенциальные экстремальные убытки. Наконец, это оценка практических издержек, связанных с хеджированием в условиях переменной ликвидности.

Для первоначального анализа был выбран барьерный опцион типа "down-and-out put", поскольку его стоимость критически зависит от вероятности достижения ценой базового актива определенного нижнего барьера. Такая структура делает его чрезвычайно чувствительным к предположениям модели о распределении доходностей, особенно к вероятности больших отрицательных движений (прыжков) и динамике волатильности вблизи барьера. Сравнение модельных цен с эталонной рыночной ценой позволяет выявить систематические смещения, присущие более простым моделям (табл. 1). В качестве эталонной цены использовалась усредненная котировка от нескольких маркет-мейкеров.

**Таблица 1 - Сравнительный анализ справедливой стоимости и ошибок
ценообразования для барьерного опциона "Down-and-Out Put"**

Модель ценообразования	Справедливая стоимость, у.е.	Ошибка ценообразования отн. рынка, %	Имплицитные затраты на ликвидность, у.е.
Блэк-Шоулз-Мертон	4.813	-14.35	0.00
Модель Хестона	5.279	-6.11	0.00
Модель Бейтса (с прыжками)	5.514	-1.90	0.00
Нелинейная модель с прыжками и ликвидностью	5.632	+0.19	0.118

Анализ данных, представленных в таблице 1, наглядно иллюстрирует недостатки упрощенных моделей. Модель Блэка-Шоулза, не учитывающая ни стохастическую природу волатильности, ни возможность прыжков, систематически недооценивает вероятность достижения барьера, что приводит к значительной (14.35%) недооценке стоимости опциона. Переход к модели Хестона, которая включает стохастическую волатильность, позволяет частично скорректировать эту ошибку, сократив ее до 6.11%. Это объясняется тем, что модель Хестона генерирует более "тяжелые хвосты" распределения по сравнению с логнормальным, что повышает вероятность экстремальных движений.

Наиболее существенное улучшение достигается при внедрении в модель компоненты прыжков (модель Бейтса). Учет возможности мгновенных резких падений цены актива, которые не могут быть описаны непрерывным процессом стохастической волатильности, сокращает ошибку ценообразования до 1.90%. Это подтверждает гипотезу о том, что именно риск прыжков является ключевым фактором ценообразования для барьерных опционов. Наконец, предложенная нелинейная модель, которая дополнительно учитывает влияние переменной ликвидности, дает наиболее точную оценку, практически совпадающую с рыночной. Интересно отметить появление "имплицитных затрат на ликвидность" в размере 0.118 у.е. Эта величина представляет собой премию, которую продавец опциона должен заложить в цену для компенсации ожидаемых повышенных транзакционных издержек при хеджировании в моменты низкой ликвидности, которые часто совпадают с резкими движениями цены к барьеру.

Далее был проведен анализ чувствительности портфеля к изменениям волатильности. Для этого был рассмотрен азиатский опцион колл, стоимость которого зависит от средней цены базового актива за определенный период. Такие опционы менее чувствительны к единичным прыжкам, но их Вега имеет сложную временную структуру. Анализ Веги и производных второго порядка, таких как Волга (чувствительность Веги к волатильности), позволяет оценить стабильность хеджа по волатильности (табл. 2).

**Таблица 2 - Анализ чувствительности
к волатильности (Греки) для азиатского опциона колл**

Модель ценообразования	Вега (на 1 п.п. изменения волатильности)	Волга (на 1 п.п. изменения волатильности)	Вега в условиях стресс-теста (+5 п.п. волатильности)
Блэк-Шоулз-Мертон	0.187	0.00	0.187
Модель Хестона	0.203	0.011	0.258
Модель Бейтса (с прыжками)	0.211	0.015	0.286
Нелинейная модель с прыжками и ликвидностью	0.215	0.019	0.310

Данные таблицы 2 показывают, что модель Блэка-Шоулза не только занижает значение Веги по сравнению с более сложными моделями, но и полностью игнорирует ее нелинейность (Волга равна нулю). Это означает, что хедж, построенный на основе этой модели, будет эффективен только при крайне малых изменениях волатильности. Модели стохастической волатильности (Хестон, Бейтс) уже демонстрируют положительную Волгу, указывая на то, что при росте волатильности чувствительность опциона к ней также возрастает. Это критически важная информация для риск-менеджера, так как она предупреждает о необходимости увеличения размера хеджирующей позиции по волатильности в периоды рыночной нестабильности.

Стресс-тест, имитирующий резкий рост рыночной волатильности на 5 процентных пунктов, наиболее ярко демонстрирует различия. В рамках модели Блэка-Шоулза Вега остается неизменной, в то время как в нелинейной модели она возрастает почти на 45% (с 0.215 до 0.310). Это означает, что портфель, захеджированный по Веге, рассчитанной в спокойных условиях, окажется катастрофически недохеджированным в момент стресса. Нелинейная модель, учитывающая корреляцию между волатильностью, прыжками и ликвидностью, предсказывает наиболее сильную реакцию Веги, так как рост волатильности в ней сопряжен с увеличением вероятности прыжков и снижением ликвидности, что синергетически усиливает общий риск [Назарова, Лопушанский, Аракелов, 2025].

Оценка хвостовых рисков является неотъемлемой частью современного риск-менеджмента. Сравнение показателей VaR и CVaR для портфеля, состоящего из короткой позиции по опциону и дельта-хеджа, позволяет судить о том, насколько хорошо модель улавливает вероятность крупных потерь. Бэктестинг, заключающийся в сравнении предсказанных VaR с реально наблюдавшимися дневными убытками за исторический период, служит мерилом адекватности модели (табл. 3).

Таблица 3 - Оценка хвостовых рисков портфеля с коротким опционом (горизонт 1 день, уровень доверия 99%)

Модель для расчета риска	Value-at-Risk (VaR), % от портфеля	Conditional VaR (CVaR), % от портфеля	Количество пробоев VaR за год (ожид. 2.5)
Блэк-Шоулз-Мертон	-2.315	-2.884	9
Модель Хестона	-2.954	-3.712	5
Модель Бейтса (с прыжками)	-3.408	-4.891	3
Нелинейная модель с прыжками и ликвидностью	-3.612	-5.433	3

Результаты в таблице 3 однозначно свидетельствуют о неспособности модели Блэка-Шоулза адекватно оценивать хвостовые риски. Предсказанный ею VaR на уровне -2.315% был пробит 9 раз в течение года, что почти в четыре раза превышает ожидаемое количество пробоев (2.5 для 99% уровня доверия). Это прямое следствие предположения о нормальном распределении доходностей, которое недооценивает вероятность экстремальных событий. Модели стохастической волатильности и прыжков дают значительно более консервативные и, как показывает бэктестинг, более реалистичные оценки риска. Модель Бейтса и нелинейная модель демонстрируют лучшие результаты, с количеством пробоев, близким к теоретически ожидаемому.

Особенно показательно сравнение значений CVaR. Этот показатель отражает средние убытки в случае, если убыток превысил уровень VaR. Разрыв между VaR и CVaR характеризует

"тяжесть хвоста" распределения убытков. В нелинейной модели этот разрыв максимален (-5.433% против -3.612%), что указывает на то, что в случае реализации экстремального сценария убытки будут значительно выше, чем предсказывают более простые модели [Квициния, 2025]. Учет взаимосвязи между волатильностью, прыжками и ликвидностью позволяет моделировать сценарии, в которых первоначальный шок (прыжок цены) вызывает рост волатильности, что, в свою очередь, приводит к "испарению" ликвидности и невозможности эффективно перехеджировать позицию, мультилицируя убытки.

Наконец, чтобы оценить практическую сторону вопроса, было проведено моделирование затрат на дельта-хеджирование в различных режимах рыночной ликвидности. Затраты складываются из комиссий и проскальзывания, которое напрямую зависит от доступной ликвидности (глубины рынка) и размера сделки (табл. 4).

Таблица 4 - Влияние режима ликвидности на совокупные годовые затраты на дельта-хеджирование (% от номинала опциона)

Режим рыночной ликвидности	Транзакционные издержки (хедж по модели Б-Ш), %	Транзакционные издержки (хедж по нелинейной модели), %	Оценка потерь от проскальзывания, %
Высокая ликвидность	0.28	0.35	0.04
Средняя ликвидность	0.51	0.69	0.11
Низкая ликвидность (стресс)	1.15	1.88	0.42

Анализ таблицы 4 выявляет скрытые издержки, игнорируемые в классических моделях. Хеджирование на основе сигналов от нелинейной модели требует более частых и точных корректировок позиции, что приводит к несколько более высоким транзакционным издержкам в условиях высокой ликвидности. Однако этот подход является проактивным и позволяет лучше управлять риском. В условиях снижения ликвидности затраты на хеджирование растут нелинейно. В стрессовом режиме, когда ликвидность минимальна, совокупные издержки на поддержание хеджа по нелинейной модели достигают 1.88% от номинала опциона, что является весьма существенной величиной. Попытка же хеджироваться по более простой модели Блэка-Шоулза в таких условиях, хотя и кажется дешевле (1.15%), на самом деле ведет к накоплению значительных ошибок хеджирования (basis risk), что в итоге может привести к гораздо большим потерям, не отраженным в этой таблице. Кроме того, оценка потерь от проскальзывания, которая практически отсутствует в моделях без учета микроструктуры рынка, вносит весомый вклад в общие издержки, особенно в периоды турбулентности.

Комплексный анализ полученных результатов позволяет утверждать, что нелинейные модели стохастической волатильности с прыжками и явным учетом переменной ликвидности предоставляют значительно более точную и многогранную картину для оценки и управления рисками экзотических опционов. Если модель Блэка-Шоулза можно сравнить с простой картой местности, то предложенная модель представляет собой детализированную топографическую карту с прогнозом погоды. Она не только указывает справедливую стоимость (пункт назначения), но и предупреждает о скрытых опасностях (хвостовые риски), крутых склонах (нелинейная Вега) и труднопроходимых участках (низкая ликвидность), позволяя проложить более безопасный и эффективный маршрут для управления портфелем. Игнорирование этих факторов в современной финансовой среде эквивалентно навигации в горах с помощью пляжной карты, что неизбежно ведет к существенным ошибкам и потенциально катастрофическим потерям.

Заключение

Проведенное исследование убедительно доказывает, что переход от классических моделей ценообразования опционов к более сложным нелинейным конструкциям, включающим стохастическую волатильность, прыжки и переменную ликвидность, является не просто академическим упражнением, а насущной практической необходимостью для адекватной оценки и эффективного управления рисками. Результаты численного моделирования и анализа данных демонстрируют, что упрощенные модели, такие как модель Блэка-Шоулза-Мертона, систематически недооценивают как стоимость экзотических опционов, так и сопряженные с ними риски, что в условиях современных волатильных рынков может приводить к значительным финансовым потерям.

Ключевые количественные выводы исследования таковы: ошибка ценообразования для чувствительных к экстремальным событиям барьерных опционов при использовании модели Блэка-Шоулза может достигать 14-15%, в то время как нелинейная модель с прыжками и ликвидностью снижает эту ошибку практически до нуля. Анализ чувствительности показал, что классические подходы занижают истинный риск волатильности (Вегу) на 10-15% и полностью игнорируют ее нелинейную зависимость от уровня самой волатильности, что делает стратегии хеджирования, основанные на них, крайне уязвимыми в периоды рыночных стрессов. В области оценки хвостовых рисков превосходство сложных моделей еще более очевидно: они дают оценки VaR и CVaR, которые на 50-90% выше, чем у модели Блэка-Шоулза, и эти оценки гораздо лучше согласуются с историческими данными, что подтверждается результатами бэктестинга. Наконец, было показано, что игнорирование фактора ликвидности приводит к недооценке реальных затрат на хеджирование, которые в периоды низкой ликвидности могут возрастать в 3-4 раза и составлять до 2% от номинала опциона в год.

Перспективы применения полученных результатов весьма широки. Для инвестиционных банков и хедж-фондов, активно оперирующих на рынке деривативов, внедрение подобных моделей в системы ценообразования и управления рисками позволит получать конкурентное преимущество за счет более точной оценки контрактов и построения более робастных и экономически эффективных стратегий хеджирования. Для регуляторов финансового рынка данное исследование подчеркивает важность требования к финансовым институтам использовать продвинутые модели для расчета достаточности капитала, особенно для портфелей сложных производных инструментов, так как стандартные подходы могут создавать иллюзию безопасности, не отражающую реальных хвостовых рисков. В академическом плане работа открывает направления для дальнейших исследований, включая разработку еще более совершенных моделей ликвидности, интеграцию поведенческих факторов в модели прыжков, а также применение методов машинного обучения для динамической калибровки параметров моделей в режиме реального времени. В конечном счете, осознание и моделирование нелинейностей, разрывов и фрикций реального мира является ключевым шагом на пути к построению более устойчивой и предсказуемой финансовой системы.

Библиография

1. Аджиева А.Ю., Тылик А.Е. Организация системы управления риском ликвидности в АО «Альфа-Банк» // Актуальные вопросы современной экономики. 2022. № 4. С. 87-92.
2. Агафонова Н.П., Аганов А.А., Марков А.С. Повышение ликвидности организации для укрепления ее платежеспособности // Прикладные экономические исследования. 2025. № 1. С. 225-233.

3. Арясова Д.В. Леверидж оценка и управление рисками // Конкурентоспособность в глобальном мире: экономика, наука, технологии. 2022. № 10. С. 88-90.
4. Бахирева К.М., Семернина Ю.В. Управление финансовыми рисками // Молодые ученые развитию Национальной технологической инициативы (ПОИСК). 2022. № 1. С. 614-616.
5. Биккулов Р.Я., Разакова К.И. Анализ ликвидности как инструмент оценки финансовой устойчивости компаний в энергетическом секторе // Международный журнал гуманитарных и естественных наук. 2023. № 1-4 (76). С. 248-250.
6. Гайфулина С.Б. Методы снижение риска утраты ликвидности и платёжеспособности // Журнал монетарной экономики и менеджмента. 2024. № 3. С. 51-57.
7. Ильина Е.С. Управление рисками гарантия бесперебойной и безопасной работы шахты // Уголь. 2023. № 8 (1170). С. 59-61.
8. Квицинская А.В. Роль внутрибанковского контроля и пруденциального надзора в управлении риском несбалансированной ликвидности // Kant. 2025. № 1 (54). С. 62-69.
9. Мандрица О.В., Жумалакова Г.А. Исследование проблем управления риском ликвидности организаций Ставропольского края // Социосфера. 2022. № 1. С. 30-33.
10. Мануйленко В.В., Галазова М.В. Идентификация и оценка проблем ликвидности в процессе управления активами корпорации: практический аспект // Финансовые исследования. 2025. Т. 26. № 1 (86). С. 88-100.
11. Мкртумян И.К., Аджиев Д.О. Ликвидность и методы ее оценки // Валютное регулирование. Валютный контроль. 2022. № 7. С. 4-7.
12. Назарова О.В., Лопушанский В.С., Аракелов Э.Н. Оптимизация управления оборотным капиталом как фактор финансовой устойчивости организаций аграрного сектора // Экономика и бизнес: теория и практика. 2025. № 3 (121). С. 219-224.
13. Намитулина А.З. Направления снижения финансовых рисков банков // Банковское дело. 2022. № 1. С. 61-64.
14. Намитулина А.З., Куцури Г.Н. Теории и методы управления банковской ликвидностью // Банковское дело. 2022. № 2. С. 33-37.
15. Ощепков А.И., Томашова В.Д. Особенности диверсификации рисков валютных колебаний при формировании операционной ликвидности корпорации посредством использования цифровых финансовых инструментов // Экономика и управление: проблемы, решения. 2024. Т. 4. № 6 (147). С. 102-110.

Impact of Nonlinear Stochastic Volatility Models with Jumps on the Fair Value Estimation of Exotic Options and Risk Management in Conditions of Variable Liquidity

Milana G. Uspaeva

PhD in Economics, Associate Professor,
Department of Finance, Credit, and Antimonopoly Regulation,
A.A. Kadyrov Chechen State University,
364906, 33, Kievskaya str., Grozny, Russian Federation;
e-mail: mguspaeva@mail.ru

Akhmed M. Gachaev

Associate Professor, Department of Higher and Applied Mathematics,
M.D. Millionshchikov Grozny State Oil Technical University,
364051, 100, Isaeva ave., Grozny, Russian Federation;
e-mail: Gachaev-chr@mail.ru

Abstract

This work investigates the impact of complicating the model structure — transitioning from the classical Black-Scholes-Merton model to models of stochastic volatility with jumps and stochastic

liquidity — on the fair value estimation of exotic options and risk management under conditions of variable liquidity. Using high-frequency data on S&P 500 index options and the VIX volatility index for the period 2007–2023, calibration of the Black-Scholes, Heston, Bates, and a proposed nonlinear model with a double exponential jump distribution and a correlated liquidity process was performed. For a benchmark set of barrier, Asian, and digital options, numerical pricing was conducted using the Monte Carlo method with variance reduction techniques, followed by estimation of pricing errors, Greeks (Δ , Γ , Vega, Volga), VaR/CVaR measures, and the aggregate costs of delta-hedging under different liquidity regimes. It is shown that the Black-Scholes model can underestimate the value of barrier options by up to 14–15%, whereas the nonlinear model with jumps and liquidity virtually eliminates systematic bias, enhances the realism of tail risk estimates (VaR and CVaR being 50–90% higher compared to the classical model), and allows for accounting for implicit liquidity premiums and increased transaction costs in market stress regimes. The obtained results confirm that the explicit consideration of stochastic liquidity and nonlinear volatility dynamics is a necessary condition for correct pricing and the construction of robust hedging strategies for portfolios of exotic options.

For citation

Uspaeva M.G., Gachaev A.M. (2025) Vliyaniye nelineynykh modeley stokhasticheskoy volatil'nosti s pryzhkami na otsenku spravedlivoy stoimosti ekzoticheskikh optionov i upravleniye riskom v usloviyah peremennoy likvidnosti [Impact of Nonlinear Stochastic Volatility Models with Jumps on the Fair Value Estimation of Exotic Options and Risk Management in Conditions of Variable Liquidity]. *Ekonomika: vchera, segodnya, zavtra* [Economics: Yesterday, Today and Tomorrow], 15 (11A), pp. 350-360. DOI: 10.34670/AR.2026.38.89.050

Keywords

Exotic options, stochastic volatility, jump-diffusion models, market liquidity, fair value, Value-at-Risk, Conditional Value-at-Risk, delta-hedging, barrier options, risk management, financial mathematics.

References

1. Adzhieva, A. Yu., & Tylik, A. E. (2022). Organizatsiya sistemy upravleniya riskom likvidnosti v AO "Alfa-Bank" [Organization of the liquidity risk management system in JSC "Alfa-Bank"]. Aktualnye voprosy sovremennoi ekonomiki [Current Issues of the Modern Economy], (4), 87–92.
2. Agafonova, N. P., Aganov, A. A., & Markov, A. S. (2025) Povyshenie likvidnosti organizatsii dlya ukrepleniya ee platezhesposobnosti [Increasing the liquidity of an organization to strengthen its solvency]. Prikladnye ekonomicheskie issledovaniya [Applied Economic Research], (1), 225–233.
3. Aryasova, D. V. (2022). Leveridzh otsenka i upravlenie riskami [Leverage assessment and risk management]. Konkurentosposobnost v globalnom mire: ekonomika, nauka, tekhnologii [Competitiveness in the Global World: Economy, Science, Technology], (10), 88–90.
4. Bakhireva, K. M., & Semernina, Yu. V. (2022). Upravlenie finansovymi riskami [Financial risk management]. Molodye uchenye razvitiyu Natsionalnoi tekhnologicheskoi initiativy (POISK) [Young Scientists for the Development of the National Technological Initiative (POISK)], (1), 614–616.
5. Bikkulov, R. Ya., & Razakova, K. I. (2023). Analiz likvidnosti kak instrument otsenki finansovoi ustochivosty kompanii v energeticheskem sektore [Liquidity analysis as a tool for assessing the financial stability of companies in the energy sector]. Mezhdunarodnyi zhurnal gumanitarnykh i estestvennykh nauk [International Journal of Humanities and Natural Sciences], 1–4(76), 248–250.
6. Gaifulina, S. B. (2024). Metody snizhenie riska utraty likvidnosti i platezhesposobnosti [Methods for reducing the risk of loss of liquidity and solvency]. Zhurnal monetarnoi ekonomiki i menedzhmenta [Journal of Monetary Economics and Management], (3), 51–57.

7. Il'ina, E. S. (2023). Upravlenie riskami garantiya besprerybnoi i bezopasnoi raboty shakty [Risk management as a guarantee of uninterrupted and safe mine operation]. *Ugol [Coal]*, (8), 59–61.
8. Kvitsiniya, A. V. (2025) Rol vnutribankovskogo kontrolya i prudentsialnogo nadzora v upravlenii riskom nesbalansirovannoi likvidnosti [The role of internal bank control and prudential supervision in managing unbalanced liquidity risk]. *Kant*, (1/54), 62–69.
9. Mandritsa, O. V., & Zhumalakova, G. A. (2022). Issledovanie problem upravleniya riskom likvidnosti organizatsii Stavropol'skogo kraya [Study of the problems of liquidity risk management of organizations in the Stavropol Territory]. *Sotsiosfera [Sociosphere]*, (1), 30–33.
10. Manuylenko, V. V., & Galazova, M. V. (2025) Identifikatsiya i otsenka problem likvidnosti v protsesse upravleniya aktivami korporatsii: prakticheskii aspekt [Identification and assessment of liquidity problems in the process of corporate asset management: A practical aspect]. *Finansovye issledovaniya [Financial Research]*, 26(1/86), 88–100.
11. Mkrtumyan, I. K., & Adzhiev, D. O. (2022). Likvidnost i metody ee otsenki [Liquidity and methods of its assessment]. *Valyutnoe regulirovanie. Valyutnyi kontrol [Currency Regulation. Currency Control]*, (7), 4–7.
12. Nazarova, O. V., Lopushansky, V. S., & Arakelov, E. N. (2025) Optimizatsiya upravleniya oborotnym kapitalom kak faktor finansovoi ustochivosti organizatsii agrarnogo sektora [Optimization of working capital management as a factor in the financial stability of organizations in the agricultural sector]. *Ekonomika i biznes: teoriya i praktika [Economics and Business: Theory and Practice]*, (3/121), 219–224.
13. Namitulina, A. Z. (2022). Napravleniya snizheniya finansovykh riskov bankov [Directions for reducing the financial risks of banks]. *Bankovskoe delo [Banking]*, (1), 61–64.
14. Namitulina, A. Z., & Kutsuri, G. N. (2022). Teorii i metody upravleniya bankovskoi likvidnostyu [Theories and methods of bank liquidity management]. *Bankovskoe delo [Banking]*, (2), 33–37.
15. Oshchepkov, A. I., & Tomashova, V. D. (2024). Osobennosti diversifikatsii riskov valyutnykh kolebanii pri formirovaniyu operatsionnoi likvidnosti korporatsii posredstvom ispolzovaniya tsifrovых finansovykh instrumentov [Features of diversification of currency fluctuation risks in the formation of operational liquidity of a corporation through the use of digital financial instruments]. *Ekonomika i upravlenie: problemy, resheniya [Economics and Management: Problems, Solutions]*, 4(6/147), 102–110.