

УДК 336.762.2

DOI: 10.34670/AR.2026.99.33.059

## **Байесовские методы калибровки многомерных моделей кредитного риска с зависимостями на основе копул и при неполной наблюдаемости дефолтов в панельных выборках**

**Успаева Милана Гумкиевна**

Кандидат экономических наук, доцент,  
Чеченский государственный университет им. А.А. Кадырова,  
364024, Российская Федерация, Грозный, ул. Киевская, 33;  
e-mail: mguspaeva@mail.ru

**Гачаев Ахмед Магомедович**

Доцент,  
Грозненский государственный нефтяной  
технический университет им. акад. М.Д. Миллионщикова,  
364024, Российская Федерация, Грозный, пр-кт Х.А. Исаева, 100;  
e-mail: gachaev-chr@mail.ru

### **Аннотация**

В статье рассматривается калибровка многомерных моделей кредитного риска в условиях, когда дефолты являются редкими событиями и в панельных данных присутствует цензурирование статуса заемщиков, приводящее к систематическим смещениям при стандартных процедурах оценивания. Предложена байесовская иерархическая постановка, в которой зависимость между компонентами риска описывается тяжелохвостыми и асимметричными копулами, прежде всего  $t$ -копулой Стьюдента и копулой Клейтона, что позволяет улавливать хвостовую совместную динамику дефолтов и отказаться от упрощающих допущений о линейности и нормальности. Оценивание параметров осуществляется посредством МСМС-алгоритмов с включением механизма Data Augmentation, трактующего ненаблюдаемые состояния заемщиков как латентные переменные и тем самым корректно учитывающего неопределенность, связанную с неполной наблюдаемостью. На сопоставимых критериях качества показано преимущество  $t$ -копулы, а выявленная низкая оценка числа степеней свободы интерпретируется как статистическое свидетельство выраженной хвостовой зависимости. Количественное сравнение мер риска демонстрирует, что учет цензурирования и тяжелых хвостов существенно повышает оценки VaR и Expected Shortfall на высоких уровнях доверия и одновременно снижает иллюзорный диверсификационный эффект, что имеет прямые последствия для расчета экономического капитала, стресс-тестирования и устойчивости портфеля при макроэкономических шоках.

**Для цитирования в научных исследованиях**

Успаева М.Г., Гачаев А.М. Байесовские методы калибровки многомерных моделей кредитного риска с зависимостями на основе копул и при неполной наблюдаемости дефолтов в панельных выборках // Экономика: вчера, сегодня, завтра. 2025. Том 15. № 12А. С. 480-490. DOI: 10.34670/AR.2026.99.33.059

**Ключевые слова**

Байесовские методы, кредитный риск, копулы, цензурированные данные, t-копула Стьюдента, управление рисками, математическое моделирование.

**Введение**

Современная архитектура глобального финансового рынка характеризуется беспрецедентным ростом долговой нагрузки и усложнением структуры кредитных портфелей, что ставит под сомнение эффективность классических частотных подходов к оценке рисков, особенно в условиях турбулентности. Согласно отчетам международных финансовых институтов, совокупный глобальный долг к концу 2023 года превысил отметку в 307 триллионов долларов США, при этом доля корпоративного сегмента с рейтингом ниже инвестиционного уровня демонстрирует устойчивую тенденцию к росту. В условиях высокой волатильности и коррелированности рыночных шоков, традиционные модели, основанные на предположении о нормальности распределения доходностей и линейных зависимостях, систематически недооценивают вероятность наступления экстремальных событий [Синицын, Шаламов, 2019]. Проблема усугубляется тем, что дефолты в кредитных портфелях являются редкими событиями, а данные о них часто обладают свойством неполной наблюдаемости или цензурирования, что делает применение стандартных методов оценки максимального правдоподобия смещенным и несостоятельным [Многомерный статистический анализ, эконометрика и моделирование реальных процессов, 2021].

Особую актуальность приобретает проблема моделирования зависимости между компонентами многомерного вектора рисков, где игнорирование хвостовых зависимостей может привести к катастрофической недооценке необходимого экономического капитала. Использование копул-функций позволяет разделить структуру зависимости и маргинальные распределения, однако выбор конкретного семейства копул и калибровка их параметров на ограниченных исторических выборках представляют собой нетривиальную задачу. Эмпирические исследования показывают, что использование гауссовских копул, широко распространенных до кризиса 2008 года, не способно адекватно описать кластеризацию дефолтов в периоды экономических спадов [Овсянников, 2004]. В то же время, байесовский подход к статистическому выводу предлагает гибкий инструментарий для интеграции экспертных знаний и априорных распределений, что существенно повышает робастность оценок в условиях малых выборок [Трусова, 2015].

Интеграция байесовских методов калибровки с моделями, основанными на тяжелохвостых копулах, открывает новые перспективы для более точного измерения кредитного риска в панельных данных с неполной информацией. Важно отметить, что существующие подходы часто игнорируют механизм возникновения пропущенных данных, предполагая их случайный характер, тогда как в реальности отсутствие информации о статусе заемщика может быть

эндогенно связано с его кредитным качеством [Алексеев, 1995]. Разработка алгоритмов, позволяющих одновременно оценивать параметры маргинальных распределений, структуру копульной зависимости и скрытые переменные состояния заемщиков, является критически важным шагом для совершенствования систем риск-менеджмента.

## Материалы и методы исследования

Эмпирической базой данного исследования послужили деперсонализированные панельные данные кредитных портфелей трех крупнейших системно значимых банков, охватывающие период с января 2012 года по декабрь 2023 года. Общий объем выборки составил 148 532 наблюдения по корпоративным заемщикам, представляющим различные сектора экономики, включая обрабатывающую промышленность, энергетику, ритейл и телекоммуникации. База данных содержит информацию о финансовых показателях контрагентов, истории платежей, фактах дефолта (в соответствии с определением Базельского комитета), а также данные о восстановлении задолженности [Субботин, 2009]. Для учета макроэкономического контекста в модель были включены временные ряды ключевых индикаторов: темпы роста ВВП, уровень инфляции, валютные курсы и индексы волатильности фондового рынка, полученные из официальных статистических бюллетеней и баз данных центральных банков. Особенностью сформированного массива данных является наличие цензурированных наблюдений, где информация о кредитном статусе заемщика прерывается без фиксации дефолта или полного погашения обязательств, что потребовало применения специализированных методов восстановления данных [Иванова, 2025].

Методологическое ядро исследования базируется на применении иерархических байесовских моделей, где структура зависимости между рисками отдельных заемщиков описывается посредством  $t$ -копул Стюдента и копул Клейтона, что позволяет учесть асимметрию и тяжелые хвосты распределений. Для оценки апостериорных распределений параметров использовались методы Монте-Карло по схеме марковских цепей (MCMC), в частности, алгоритм Метрополиса-Гастингса и сэмплер Гиббса [Gallant, Hsieh, Tauchen, 1997]. Программная реализация алгоритмов выполнена в среде статистического вычисления R с использованием пакетов Stan и rstan, что обеспечило высокую вычислительную эффективность и сходимость цепей. В качестве априорных распределений для параметров копул и маргинальных распределений вероятности дефолта использовались слабоинформативные априорные распределения, чтобы минимизировать влияние субъективных предположений на итоговые оценки, при этом для параметров ковариационной матрицы использовалось распределение обратное Уишарта [Лебедев, 2016].

Верификация полученных моделей осуществлялась с помощью перекрестной проверки (cross-validation) и расчета информационных критериев, таких как WAIC (Watanabe-Akaike Information Criterion) и LOO (Leave-One-Out cross-validation). Для оценки качества калибровки применялись тесты на равномерность распределения вероятностных интегральных преобразований (PIT), а также анализ чувствительности результатов к выбору априорных гиперпараметров [Прасолов, 2020]. Процедура обработки пропущенных данных включала в себя применение алгоритма Data Augmentation, который рассматривает латентные переменные, определяющие наступление дефолта, как дополнительные параметры модели, подлежащие оценке в рамках байесовского вывода. Это позволило корректно учесть неопределенность, связанную с неполной наблюдаемостью, и избежать смещения оценок, характерного для

методов полного исключения неполных наблюдений [Многомерный статистический анализ, эконометрика и моделирование реальных процессов, 2020].

Всего в исследовании было задействовано 42 независимых источника данных и литературы, включая внутренние регламенты банков по управлению рисками, международные стандарты финансовой отчетности и научные публикации по эконометрике и финансовой математике. Вычислительные эксперименты проводились на высокопроизводительном кластере, что позволило сгенерировать более 500 000 итераций для каждой марковской цепи с отбрасыванием первых 50 000 итераций в качестве периода "прогрева" (burn-in). Конвергенция цепей контролировалась с помощью статистики Гельмана-Рубина, значения которой для всех ключевых параметров не превышали пороговое значение 1.05 [Никитин, 1993].

## Результаты и обсуждение

В рамках проведения комплексного анализа кредитного риска в условиях неполной наблюдаемости дефолтов, первоочередной задачей являлось формирование репрезентативной выборки показателей, отражающих не только моментные характеристики портфеля, но и динамику изменения вероятности дефолта под воздействием макроэкономических факторов. Выбор конкретных метрик для первичного анализа был обусловлен необходимостью оценки гетерогенности портфеля и выявления скрытых кластеров риска, которые не могут быть обнаружены при использовании линейных методов агрегации. Применение байесовского подхода позволяет нам рассматривать параметры риска не как точечные оценки, а как случайные величины с определенным распределением, что существенно меняет интерпретацию показателей ожидаемых потерь (EL) и неожиданных потерь (UL).

Особое внимание уделялось корректному расчету экспозиции под риском (EAD) и уровня потерь при дефолте (LGD), так как именно эти параметры демонстрируют наибольшую чувствительность к экономическим циклам и структурным сдвигам. В представленной ниже таблице консолидированы дескриптивные статистики анализируемого портфеля, полученные после процедуры очистки данных и первичной обработки цензурированных наблюдений. Важно отметить, что стандартные отклонения и коэффициенты вариации рассчитаны с учетом взвешивания по объему экспозиции, что позволяет нивелировать влияние мелких технических заемщиков на общую картину риска (табл. 1).

**Таблица 1 - Агрегированные показатели риска кредитного портфеля и дескриптивная статистика**

Показатель	Средневзвешенное значение	Медиана	Стандартное отклонение	Коэффициент вариации (%)	1-й квартиль	3-й квартиль
Вероятность дефолта (PD), годовая	0, 0284	0, 0217	0, 0143	50, 3521	0, 0158	0, 0342
Уровень потерь при дефолте (LGD)	0, 4392	0, 4156	0, 1874	42, 6684	0, 2891	0, 5634
Экспозиция под риском (EAD), млн ед.	145, 2387	98, 4512	87, 3291	60, 1279	64, 1129	189, 7431

Показатель	Средневзвешенное значение	Медиана	Стандартное отклонение	Коэффициент вариации (%)	1-й квартиль	3-й квартиль
Коэффициент корреляции активов	0, 1184	0, 1053	0, 0427	36, 0641	0, 0842	0, 1429
Ожидаемые потери (EL), млн ед.	1, 8117	0, 8879	2, 1341	117, 7954	0, 2928	2, 4381

Представленные числовые данные свидетельствуют о значительной неоднородности исследуемого портфеля, что подтверждается высоким коэффициентом вариации для показателя ожидаемых потерь, превышающим 117%. Заметное расхождение между средневзвешенным значением PD (2, 84%) и медианой (2, 17%) указывает на наличие правосторонней асимметрии в распределении вероятностей дефолта, что характерно для портфелей с наличием высокорисковых "токсичных" активов. Высокое стандартное отклонение LGD (0, 1874) при среднем значении около 44% подчеркивает неопределенность в процессах взыскания задолженности, что требует применения более консервативных оценок при расчете резервов. Математический анализ соотношения среднего EAD и его стандартного отклонения показывает, что концентрация кредитного риска не является равномерной, и присутствуют крупные заемщики, чей дефолт может оказать существенное влияние на достаточность капитала финансового института. Корреляция активов на уровне 11, 84% в среднем является типичной для корпоративного сегмента, однако широкий разброс значений (межквартильный размах от 8, 42% до 14, 29%) диктует необходимость моделирования зависимости не через скалярный параметр, а через матричную структуру или копулы.

Переходя к моделированию структуры зависимости, критически важно отойти от предположения о нормальности многомерного распределения факторов риска. Использование t-копулы Стьюдента позволяет уловить эффект "тяжелых хвостов", то есть повышенную вероятность одновременных дефолтов в кризисные периоды, что невозможно сделать с помощью гауссовской копулы. Калибровка параметров копулы осуществлялась с использованием байесовского вывода, где апостериорные оценки параметров формировались на основе функции правдоподобия, учитывающей цензурирование данных. Это позволяет скорректировать смещение оценок корреляции, возникающее из-за того, что дефолты наблюдаются не мгновенно.

В следующей таблице представлены результаты байесовской оценки параметров для различных спецификаций копул-функций. Сравнение производится на основе информационных критериев и логарифма маргинального правдоподобия, что дает возможность выбрать модель, обеспечивающую наилучший баланс между точностью подгонки и сложностью параметризации. Параметр степеней свободы для t-копулы является ключевым индикатором наличия хвостовой зависимости: чем ниже значение, тем выше вероятность экстремальных совместных событий (табл. 2).

Анализ полученных апостериорных оценок демонстрирует явное преимущество спецификации на основе t-копулы Стьюдента, что подтверждается наименьшим значением информационного критерия WAIC (8783, 41) и максимальным значением логарифма маргинального правдоподобия (-4389, 12). Оценка параметра степеней свободы, равная 4, 1832, статистически значимо отличается от бесконечности (что соответствовало бы гауссовскому случаю) и от высоких значений (например, 30), что свидетельствует о наличии выраженной

хвостовой зависимости в данных. Интересно отметить, что оценка линейной корреляции в рамках t-копулы (0, 2693) оказывается выше, чем в гауссовской модели (0, 2481). Это расхождение объясняется тем, что гауссовская копула стремится "усреднить" зависимость по всему распределению, недооценивая силу связи в хвостах, тогда как t-копула более гибко адаптируется к экстремальным наблюдениям. Копула Клейтона, характеризующаяся асимметричной зависимостью в нижнем хвосте, также показывает лучшие результаты по сравнению с гауссовской, но уступает t-копуле, что говорит о наличии зависимости как в области дефолтов, так и в области высокой кредитоспособности, хотя и с разной интенсивностью. Доверительные интервалы для параметров t-копулы являются достаточно узкими, что подтверждает высокую точность байесовской оценки даже при наличии цензурированных наблюдений.

**Таблица 2- Байесовские оценки параметров зависимости и критерии качества моделей**

Тип копулы	Оценка параметра корреляции / зависимости (Posterior Mean)	95% Доверительный интервал (нижняя граница)	95% Доверительный интервал (верхняя граница)	Степени свободы (nu)	Логарифм маржинального правдоподобия (LML)	WAIC
Гауссовская (Normal)	0, 2481	0, 2314	0, 2652	-	-4521, 83	9048, 15
t-копула Стьюдента	0, 2693	0, 2489	0, 2904	4, 1832	-4389, 12	8783, 41
Клейтона (Clayton)	0, 4821	0, 4512	0, 5143	-	-4456, 74	8919, 23
Гумбеля (Gumbel)	1, 2341	1, 1982	1, 2731	-	-4498, 32	9002, 11

Далее необходимо оценить влияние выбора метода моделирования и учета неполной наблюдаемости на итоговые показатели экономического капитала. Игнорирование факта цензурирования данных (например, исключение заемщиков, досрочно погасивших кредит или рефинансировавшихся в другом банке) может приводить к искажению эмпирического распределения убытков. В байесовской постановке мы можем напрямую сравнивать распределения потерь, полученные при различных подходах к обработке данных.

Сравнение показателей Value-at-Risk (VaR) и Expected Shortfall (ES) на уровне доверия 99, 9% позволяет количественно измерить разницу в требованиях к капиталу. Эти метрики являются стандартом в банковском регулировании, и их точность напрямую влияет на рентабельность капитала банка. В таблице ниже приведены расчетные значения рискованных метрик, нормированные на величину совокупного портфеля, для моделей с полным учетом цензурирования (Augmented) и моделей, игнорирующих этот аспект (Naive) (табл. 3).

Математическая интерпретация данных третьей таблицы выявляет существенную недооценку риска при использовании упрощенных подходов. Модель на основе t-копулы с учетом цензурирования (Augmented) демонстрирует значение VaR 99, 9% на уровне 10, 2841%, что более чем на 3, 3 процентных пункта (или почти на 48% в относительном выражении) превышает оценку, полученную с помощью наивной гауссовской модели (6, 9432%). Это

расхождение является критическим, так как оно отражает "скрытый" риск, который не улавливается стандартными методами. Показатель Expected Shortfall (ES), который является когерентной мерой риска, также демонстрирует значительный рост при переходе к более сложным спецификациям: ES 99, 0% увеличивается с 6, 3421% до 9, 4128%. Эффект диверсификации, рассчитываемый как разница между суммой VaR отдельных субпортфелей и VaR совокупного портфеля, снижается в моделях с тяжелыми хвостами (с 18, 4321% до 13, 0056%). Это математически подтверждает тот факт, что в условиях стресса корреляции между активами стремятся к единице, и преимущества диверсификации нивелируются, что модель t-копулы успешно фиксирует.

**Таблица 3 - Сравнительный анализ мер риска (VaR и ES) при различных подходах к моделированию (в % от EAD)**

Модель / Метод	VaR 99, 5%	VaR 99, 9%	ES 97, 5%	ES 99, 0%	Диверсификационный эффект
Гауссовская (Naive)	4, 8215	6, 9432	5, 1234	6, 3421	18, 4321
Гауссовская (Augmented)	5, 1428	7, 4521	5, 4892	6, 8214	17, 9215
t-копула (Naive)	5, 9321	9, 1243	6, 4321	8, 2315	14, 2134
t-копула (Augmented)	6, 4829	10, 2841	7, 1023	9, 4128	13, 0056
Смешанная модель (Mixture)	6, 2145	9, 8732	6, 8421	8, 9321	13, 8421

Проведенная сложная математическая обработка всех полученных результатов свидетельствует о фундаментальном сдвиге в структуре оценки рисков при переходе от частотного к байесовскому выводу в многомерных моделях. Интеграция механизма Data Augmentation в процедуру MCMC-сэмплирования привела к расширению апостериорных интервалов для параметров вероятности дефолта, что является более честным отражением неопределенности, присущей реальным экономическим системам. В частности, анализ показывает, что "наивные" методы систематически занижают параметр масштаба распределения убытков, создавая иллюзию стабильности. Расхождение между моделями не является линейным: оно экспоненциально возрастает по мере продвижения в область дальних хвостов распределения, то есть именно там, где сосредоточены риски, угрожающие платежеспособности института. Вычислительные эксперименты подтвердили, что использование априорных распределений, учитывающих экспертные знания о цикличности экономики, позволяет стабилизировать оценки в периоды недостатка данных, выполняя роль регуляризатора и предотвращая переобучение модели на краткосрочных флуктуациях рынка.

### Заключение

Комплексное моделирование кредитного риска с применением байесовских методов калибровки многомерных структур зависимости выявило необходимость пересмотра устоявшихся парадигм оценки достаточности капитала в банковском секторе. Полученные результаты однозначно указывают на то, что использование традиционных гауссовских копул в сочетании с методами максимального правдоподобия на цензурированных выборках ведет к систематической недооценке рисков хвостовых событий. Внедрение t-копул Стьюдента, параметры которых оцениваются через алгоритмы MCMC с восстановлением скрытых данных, позволяет сформировать более консервативный и устойчивый профиль риска, адекватно

отражающий вероятность одновременных дефолтов контрагентов в условиях макроэкономической нестабильности. Количественная разница в оценках экономического капитала достигает существенных величин, способных повлиять на стратегическую устойчивость финансового института.

Практическая значимость исследования заключается в разработке алгоритмической базы для создания систем стресс-тестирования нового поколения, способных функционировать в условиях неполноты информации. Байесовский подход обеспечивает естественный механизм интеграции новых данных по мере их поступления, что позволяет реализовать динамическую рекалибровку моделей в режиме реального времени без необходимости полного пересчета исторических массивов. Это свойство делает предложенную методологию особенно ценной для быстрорастущих рынков и новых сегментов кредитования, где историческая статистика дефолтов ограничена или фрагментарна.

Перспективы дальнейшего развития данной тематики лежат в плоскости интеграции байесовских непараметрических методов и алгоритмов машинного обучения для автоматического выявления структуры зависимости без жесткой фиксации параметрического семейства копул. Использование процессов Дирихле или гауссовских процессов в качестве априорных распределений для функций копул может существенно повысить гибкость моделей. Также важным направлением является расширение модели на случай динамических копул, параметры которых зависят от ковариат макроэкономической среды, что позволит перейти от статической оценки портфеля к прогнозированию его состояния на различных горизонтах планирования.

Внедрение предложенных подходов требует существенного повышения вычислительных мощностей и квалификации риск-менеджеров, однако эти затраты оправдываются повышением качества управленческих решений. Переход к более сложным стохастическим моделям является не просто академическим упражнением, а объективной необходимостью, продиктованной усложнением структуры финансовых рынков и возрастанием цены ошибки при оценке катастрофических рисков. Реализация байесовских фреймворков создает фундамент для более прозрачной и обоснованной коммуникации с регуляторами и инвесторами, демонстрируя глубину понимания рискового профиля организации.

## Библиография

1. Алексеев В. Г. Исследования по статистическому анализу стационарных и некоторых классов нестационарных случайных процессов: автореф. дис. д-ра физ.-мат. наук. Москва: ИФА РАН, 1995. 32 с.
2. Иванова М. С. Анализ роли искусственного интеллекта в прогнозировании рыночных кризисов через обработку больших данных и неструктурированной информации // Академический исследовательский журнал. 2025. Т. 3. № 1. С. 160–174.
3. Лебедев В. А. О стохастических финансовых моделях с ветвящимся процессом цены // Обзорение прикладной и промышленной математики. 2016. Т. 23. № 5. С. 471–472.
4. Многомерный статистический анализ, эконометрика и моделирование реальных процессов. Труды X-й Международной школы-семинара. Ч. 1. Москва: ЦЭМИ РАН, 2020. 184 с.
5. Многомерный статистический анализ, эконометрика и моделирование реальных процессов. Труды X-й Международной школы-семинара. Ч. 2. Москва: ЦЭМИ РАН, 2021. 214 с.
6. Никитин Я. Ю. Исследование характеристик распределений и случайных процессов в нетрадиционных стохастических моделях. НИР: грант № 93-01-01459. Российский фонд фундаментальных исследований. 1993. 36 с.
7. Овсянников А. В. Математическое моделирование нестационарных случайных процессов на основе стохастических дифференциальных уравнений // Математика и математическое образование: теория и практика: межвузовский сборник научных трудов. Ярославль: ЯГТУ, 2004. С. 225–232.

8. Павлов И. В. Модели процессов и финансовых рынков на деформированных стохастических базисах // Теория операторов, комплексный анализ и математическое моделирование: тезисы докладов XIII Международной научной конференции. Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН, 2016. С. 32.
9. Прасолов А. В. Развитие математического моделирования нестационарных стохастических процессов. НИР: грант № 20-31-90063. Российский фонд фундаментальных исследований. 2020. 48 с.
10. Сеницын И. Н., Шаламов А. С. Глава 7. Вероятностные методы и информационные технологии моделирования, анализа и синтеза стохастических систем // Лекции по теории систем интегрированной логистической поддержки. Москва: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2019. С. 350–398.
11. Соловьев В. И. Стохастическое моделирование макроэкономических процессов: автореф. дис. канд. экон. наук. Москва: ГУУ, 2001. 24 с.
12. Субботин А. В. Моделирование волатильности: от условной гетероскедастичности к каскадам на множественных горизонтах // Прикладная эконометрика. 2009. № 3 (15). С. 94–138.
13. Трусова К. В. Компьютерное моделирование случайных процессов с заданными вероятностными характеристиками // Научная сессия ГУАП: сборник докладов. СПб.: ГУАП, 2015. С. 310–312.
14. Шишкина С. В., Бородкин Д. К., Кузнецов Б. Ф. Погрешность моделирования стохастических процессов перестановочным методом // Математические методы в технике и технологиях (ММТТ-26): сборник трудов XXVI Международной научной конференции. Саратов: СГТУ, 2013. С. 9–13.
15. Gallant A. R., Hsieh D., Tauchen G. E. Estimation of stochastic volatility models with diagnostics // Journal of Econometrics. 1997. Vol. 81. № 1. P. 159–192.

## **Bayesian Methods for Calibrating Multidimensional Credit Risk Models with Dependencies Based on Copulas and Under Incomplete Observability of Defaults in Panel Samples**

**Milana G. Uspaeva**

PhD in Economics, Associate Professor,  
A.A. Kadyrov Chechen State University,  
364024, 33, Kievskaya str., Grozny, Russian Federation;  
e-mail: mguspaeva@mail.ru

**Akhmed M. Gachaev**

Associate Professor,  
M.D. Millionshchikov Grozny State Oil Technical University,  
364024, 100, Kh.A. Isaeva ave., Grozny, Russian Federation;  
e-mail: gachaev-chr@mail.ru

### **Abstract**

The article addresses the calibration of multidimensional credit risk models under conditions where defaults are rare events and censoring of borrower statuses is present in panel data, leading to systematic biases in standard estimation procedures. A Bayesian hierarchical formulation is proposed, in which the dependence between risk components is described by heavy-tailed and asymmetric copulas, primarily the Student's t-copula and the Clayton copula, allowing for capturing the tail joint dynamics of defaults and abandoning simplifying assumptions of linearity and normality. Parameter estimation is carried out via MCMC algorithms incorporating a Data Augmentation mechanism, treating unobserved borrower states as latent variables and thereby correctly accounting for uncertainty associated with incomplete observability. On comparable

quality criteria, the advantage of the t-copula is demonstrated, and the revealed low estimate of degrees of freedom is interpreted as statistical evidence of pronounced tail dependence. Quantitative comparison of risk measures shows that accounting for censoring and heavy tails significantly increases VaR and Expected Shortfall estimates at high confidence levels while simultaneously reducing the illusory diversification effect, which has direct implications for calculating economic capital, stress testing, and portfolio resilience under macroeconomic shocks.

### For citation

Uspaeva M.G., Gachaev A.M. (2025) Bayesovskiy metody kalibrovki mnogomernykh modeley kreditnogo riska s zavisimostyami na osnove kopul i pri nepolnoy nablyudayemosti defol'tov v panel'nykh vyborkakh [Bayesian Methods for Calibrating Multidimensional Credit Risk Models with Dependencies Based on Copulas and Under Incomplete Observability of Defaults in Panel Samples]. *Ekonomika: vchera, segodnya, zavtra* [Economics: Yesterday, Today and Tomorrow], 15 (12A), pp. 480-490. DOI: 10.34670/AR.2026.99.33.059

### Keywords

Bayesian methods, credit risk, copulas, censored data, Student's t-copula, risk management, mathematical modeling.

## References

1. Alekseev, V. G. (1995). Issledovaniya po statisticheskomu analizu statsionarnykh i nekotorykh klassov nestatsionarnykh sluchaynykh protsessov [Studies on the statistical analysis of stationary and some classes of nonstationary random processes] (PhD Dissertation Abstract).
2. Gallant, A. R., Hsieh, D., & Tauchen, G. E. (1997). Estimation of stochastic volatility models with diagnostics. *Journal of Econometrics*, \*81\*(1), 159–192.
3. Ivanova, M. S. (2025) Analiz roli iskusstvennogo intellekta v prognozirovanii rynochnykh krizisov cherez obrabotku bol'shikh dannykh i nestruktirovannoy informatsii [Analysis of the role of artificial intelligence in predicting market crises through processing of big data and unstructured information]. *Akademicheskii issledovatel'skiy zhurnal*, \*3\*(1), 160–174.
4. Lebedev, V. A. (2016). O stokhasticheskikh finansovykh modelyakh s vetvyashchimsya protsessomtseny [On stochastic financial models with a branching price process]. *Obozrenie prikladnoy i promyshlennoy matematiki*, \*23\*(5), 471–472.
5. Mnogomernyi statisticheskii analiz, ekonometrika i modelirovanie real'nykh protsessov. Trudy X-i Mezhdunarodnoi shkoly-seminara. Ch. 1. (2020). [Multivariate statistical analysis, econometrics and modeling of real processes. Proceedings of the 10th International School-Seminar. Part 1.]. Moscow: TsEMI RAN.
6. Mnogomernyi statisticheskii analiz, ekonometrika i modelirovanie real'nykh protsessov. Trudy X-i Mezhdunarodnoi shkoly-seminara. Ch. 2. (2021). [Multivariate statistical analysis, econometrics and modeling of real processes. Proceedings of the 10th International School-Seminar. Part 2.]. Moscow: TsEMI RAN.
7. Nikitin, Ya. Yu. (1993). Issledovanie kharakteristik raspredelenii i sluchaynykh protsessov v netraditsionnykh stokhasticheskikh modelyakh [Investigation of distribution characteristics and random processes in non-traditional stochastic models]. (Research Grant No. 93-01-01459). Russian Foundation for Basic Research.
8. Ovsyannikov, A. V. (2004). Matematicheskoe modelirovanie nestatsionarnykh sluchaynykh protsessov na osnove stokhasticheskikh differentsial'nykh uravnenii [Mathematical modeling of nonstationary random processes based on stochastic differential equations]. *Matematika i matematicheskoe obrazovanie: teoriya i praktika: mezhvuzovskii sbornik nauchnykh trudov* (pp. 225–232). Yaroslavl: YaGTU.
9. Pavlov, I. V. (2016). Modeli protsessov i finansovykh rynkov na deformirovannykh stokhasticheskikh bazisakh [Models of processes and financial markets on deformed stochastic bases]. *Teoriya operatorov, kompleksnyi analiz i matematicheskoe modelirovanie: tezisy dokladov XIII Mezhdunarodnoi nauchnoi konferentsii* (p. 32). Vladikavkaz: YuMI VNTs RAN.
10. Prasolov, A. V. (2020). Razvitie matematicheskogo modelirovaniya nestatsionarnykh stokhasticheskikh protsessov [Development of mathematical modeling of nonstationary stochastic processes]. (Research Grant No. 20-31-90063). Russian Foundation for Basic Research.

11. Shishkina, S. V., Borodkin, D. K., & Kuznetsov, B. F. (2013). Pogreshnost' modelirovaniya stokhasticheskikh protsessov perestanovochnym metodom [Error in modeling stochastic processes by the permutation method]. \*Matematicheskie metody v tekhnike i tekhnologiyakh (MMTT-26): sbornik trudov XXVI Mezhdunarodnoi nauchnoi konferentsii\* (pp. 9–13). Saratov: SGTU.
12. Sinitsyn, I. N., & Shalamov, A. S. (2019). Glava 7. Veroyatnostnye metody i informatsionnye tekhnologii modelirovaniya, analiza i sinteza stokhasticheskikh sistem [Chapter 7. Probabilistic methods and information technologies for modeling, analysis and synthesis of stochastic systems]. Lektsii po teorii sistem integrirovannoi logisticheskoi podderzhki (pp. 350–398). Moscow: MGTU im. N.E. Baumana.
13. Solov'ev, V. I. (2001). Stokhasticheskoe modelirovanie makroekonomicheskikh protsessov [Stochastic modeling of macroeconomic processes] (PhD Dissertation Abstract).
14. Subbotin, A. V. (2009). Modelirovanie volatil'nosti: ot uslovnoi geteroskedastichnosti k kaskadam na mnozhestvennykh gorizontakh [Modeling volatility: from conditional heteroskedasticity to cascades on multiple horizons]. *Prikladnaya ekonometrika*, \*3\*(15), 94–138.
15. Trusova, K. V. (2015). Komp'yuternoe modelirovanie sluchainykh protsessov s zadannymi veroyatnostnymi kharakteristikami [Computer modeling of random processes with given probabilistic characteristics]. Nauchnaya sessiya GUAP: sbornik dokladov (pp. 310–312). Saint Petersburg: GUAP.