УДК 33 DOI: 10.34670/AR.2025.37.59.004

Динамика национального дохода в модели физического осциллятора

Геворкян Эдуард Аршавирович

Доктор физико-математических наук, профессор,
Профессор кафедры математических и естественно-научных дисциплин,
Московский университет им. С.Ю. Витте,
115432, Российская Федерация, Москва, 2-й Кожуховский проезд, 12/1;
e-mail: gevor_mesi@mail.ru

Аннотация

Данное исследование анализирует динамику национального дохода в модели осциллятора. Модель учитывает трансакционные издержки и описывается неоднородным дифференциальным уравнением, в котором роль внешней вынуждающей силы играют инвестиции. Предполагается, что зависимость инвестиций от времени задана нелинейно в соответствии с моделью Николаса Калдора. Для нахождения решения дифференциального уравнения используется аппроксимация в окрестности точки перегиба функции внешних инвестиций, используя разложение этой функции по формуле Тейлора с ограниченным числом членов. В исследовании анализируются различные случаи изменения национального дохода во времени, зависящие от взаимосвязи его определяющих параметров. При решении дифференциального уравнения применены метод Эйлера, метод подбора и начальные условия Коши. Аналитические результаты, представленные в виде графиков, демонстрируют монотонный рост и колебательный рост национального дохода.

Для цитирования в научных исследованиях

Геворкян Э.А. Динамика национального дохода в модели физического осциллятора // Экономика: вчера, сегодня, завтра. 2025. Том 15. № 8А. С. 34-42. DOI: 10.34670/AR.2025.37.59.004

Ключевые слова

Осциллятор, дифференциальное уравнение, национальный доход, внешние инвестиции, модель Калдора, экономическая динамика, математическое моделирование.

Введение

Последние годы стали свидетелями растущего интереса к научным исследованиям многих экономических процессов, пользуясь различными физическими моделями [Царёв, 2005; Царёв, 2006; Чернявский, 2011; Бурлачков, 2007; Дубовиков, Старченко, 2011; Косьянов, 2010; Геворкян, 2023; Конторов, Михайлов, Саврасов, 2001]. В статье [Геворкян, 2024] решена задача динамики национального дохода на основе физической аналогии с гармоническим осциллятором и с учётом инвестиции по Калдору [Окунев, 2011]. Однако, в этой модели не учитывались трансакционные издержки. Настоящее исследование посвящено решению той же задачи, но с включением трансакционных издержек.

Постановка задачи и её решение

Пусть национальный доход $\boldsymbol{Y(t)}$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2Y(t)}{dt^2}+2\eta\cdot\frac{dY(t)}{dt}+\omega_0^2\cdot Y(t)=\frac{(2t+1)^2}{(t+3)^2}.(1)$$

В этом уравнении первая $\boldsymbol{d^2Y(t)/dt^2}$ отображает темп изменения $\boldsymbol{Y(t)}$ (аналогично ускорению движения), $\boldsymbol{2\eta\cdot dY(t)/dt}$соответствует трансакционным издержкам (аналогично силе трения), $\boldsymbol{\omega_0^2\cdot Y(t)}$ соответствует рыночной силе, которая возвращает систему к равновесию, $\boldsymbol{\eta=const}$, $\boldsymbol{\omega_0}-$ собственная частота осциллятора. Функция $\boldsymbol{(2t+1)^2/(t+3)^2}$ в (1) представляет внешние инвестиции по модели Н. Калдора. Для решения данного дифференциального уравнения будем пользоваться разложением правой части в ряд Тейлора в окрестности точки перегиба $M(3/4;4/9)$, ограничиваясь тремя членами разложения $(0.1\cdot t^2+0.4\cdot t+0.01)$. Важно подчеркнуть, что именно область изменения $\boldsymbol{t}$вокруг точки перегиба представляет особый интерес при решении поставленной задачи. Таким образом, задача сводится к нахождению общего решения следующего уравнения

$$\frac{d^2Y(t)}{dt^2}+2\eta\cdot\frac{dY(t)}{dt}+\omega_0^2\cdot Y(t)=0{,}1\cdot t^2+0{,}4\cdot t+0{,}01.(2)$$

Известно (см., например [11]), что

$$Y_{о.н.}(t)=Y_{о.о.}(t)+Y_{ч.н.}(t).(3)$$

где $\boldsymbol{Y_{о.о.}(t)}$ является решением уравнения

$$\frac{d^2Y(t)}{dt^2}+2\eta\cdot\frac{dY(t)}{dt}+\omega_0^2\cdot Y(t)=0,(4)a$$

$\boldsymbol{Y_{ч.н.}(t)}$ представляет одно частное решение уравнения (2). В работе найдено $\boldsymbol{Y_{о.о.}(t)}$для различных соотношений параметров η^2 и ω_0^2. Они выражаются формулами:

$$1).\ \eta^2=\omega_0^2, Y_{о.о.}(t)=(c_1+c_2\cdot t)\cdot e^{-\eta\cdot t}=(c_1+c_2\cdot t)\cdot e^{-\omega_0\cdot t},(5)$$

$$2).\ \eta^2 > \omega_0^2, Y_{о.о.}(t) = \left(c_1 \cdot e^{\sqrt{\eta^2-\omega_0^2}\cdot t} + c_2 \cdot e^{-\sqrt{\eta^2-\omega_0^2}\cdot t}\right)\cdot e^{-\eta t}, \qquad (6)$$

$$\mathbf{3).}\ \boldsymbol{\eta^2 < \omega_0^2, Y_{\text{о.о.}}(t) = \left(c_1 \cdot cos\sqrt{\omega_0^2-\eta^2}\cdot t + c_2 \cdot sin\sqrt{\omega_0^2-\eta^2}\cdot t\right)\cdot e^{-\eta t}}, (\mathbf{7})$$

где c_1 и c_2 определяются из следующих начальных условий Коши

$$Y_{о.н.}(t)\big|_{t=0} = 0, Y'_{о.н.}(t)\big|_{t=0} = 0. \ (8)$$

Теперь, если для нахождения $\boldsymbol{Y_{ч.н.}(t)}$ уравнения (2) в случаях 1), 2) и 3) воспользоваться методом подбора, то получим

$$\mathbf{1).}\boldsymbol{\eta^2 = \omega_0^2, Y_{ч.н.}(t) = \frac{0,1}{\omega_0^2}\cdot t^2 + \frac{0,4(\omega_0-1)}{\omega_0^3} + \frac{0,01\omega_0^2 - 0,8\omega_0 + 0,6}{\omega_0^4}}, (\mathbf{9})\mathbf{3).}\boldsymbol{\eta^2 < \omega_0^2},$$

$$2).\ \eta^2 > \omega_0^2,$$

$$Y_{ч.н.}(t) = \frac{0,1}{\omega_0^2}\cdot t^2 - \frac{0,4\left(\eta-\omega_0^2\right)}{\omega_0^4} + \frac{0,01\omega_0^4 - (0,2+0.8\eta)\omega_0^2 + 0.8\eta^2}{\omega_0^6}, \quad (10)$$

$$\boldsymbol{Y_{\text{ч.н.}}(t) = \frac{0,1}{\omega_0^2}\cdot t^2 + \frac{0,4\left(\omega_0^2-\eta\right)}{\omega_0^4}\cdot t + \frac{0,01\omega_0^4 - (0,2+0.8\eta)\omega_0^2 + 0.8\eta^2}{\omega_0^6}}.(\mathbf{11})$$

Определив коэффициентов c_1 и c_2 (см., (5) – (7)) на основе начальных условий (8) и подставив их вместе с (9) – (11) в (3), получим $\boldsymbol{Y_{о.н.}(t)}$ уравнения (2) в виде

$$1).\ \eta^2 = \omega_0^2, Y_{о.н.}(t) = -(H + Q\cdot t)\cdot e^{-\omega_0 t} + E\cdot t^2 + F\cdot t + H, \qquad (12)$$

$$\mathbf{2).}\boldsymbol{\eta^2 > \omega_0^2},$$

$$\boldsymbol{Y_{\text{ч.н.}}(t) = -\frac{P\left(\sqrt{\eta^2-\omega_0^2}+\eta\right)+G}{2\sqrt{\eta^2-\omega_0^2}}\cdot e^{\left(\sqrt{\eta^2-\omega_0^2}-\eta\right)\cdot t}} +$$

$$+\frac{-P\left(\sqrt{\eta^2-\omega_0^2}-\eta\right)+G}{2\sqrt{\eta^2-\omega_0^2}}\cdot e^{-\left(\sqrt{\eta^2-\omega_0^2}+\eta\right)\cdot t} + E\cdot t^2 + G\cdot t + P, \qquad (13)$$

$$\mathbf{3).}\boldsymbol{\eta^2 < \omega_0^2},$$

$$\boldsymbol{Y_{о.н.}(t) = -e^{-\eta\cdot t}\left[P\cdot cos\left(\sqrt{\omega_0^2-\eta^2}\cdot t\right) + \frac{P\cdot\eta+G}{\sqrt{\omega_0^2-\eta^2}}\cdot sin\left(\sqrt{\omega_0^2-\eta^2}\cdot t\right)\right] + E\cdot t^2 + G\cdot t\ P}, (\mathbf{14})$$

где

$$\boldsymbol{H = \frac{0.01\cdot\omega_0^2 - 0.8\cdot\omega_0 + 0.6}{\omega_0^4}, Q = \frac{0.01\cdot\omega_0^2 - 0.4\cdot\omega_0 + 0.2}{\omega_0^3}}, (\mathbf{15})$$

$$\boldsymbol{E = \frac{0.1}{\omega_0^2}, F = \frac{0.4 \cdot (\omega_0 - 1)}{\omega_0^3}, G = \frac{0.4 \cdot \left(\omega_0^2 - \eta\right)}{\omega_0^4}, (16)}$$

$$\mathbf{P = \frac{0.01 \cdot \omega_0^4 - (0.2 + 0.8 \cdot \eta) \cdot \omega_0^2 + 0.8 \cdot \eta^2}{\omega_0^6}. (17)}$$

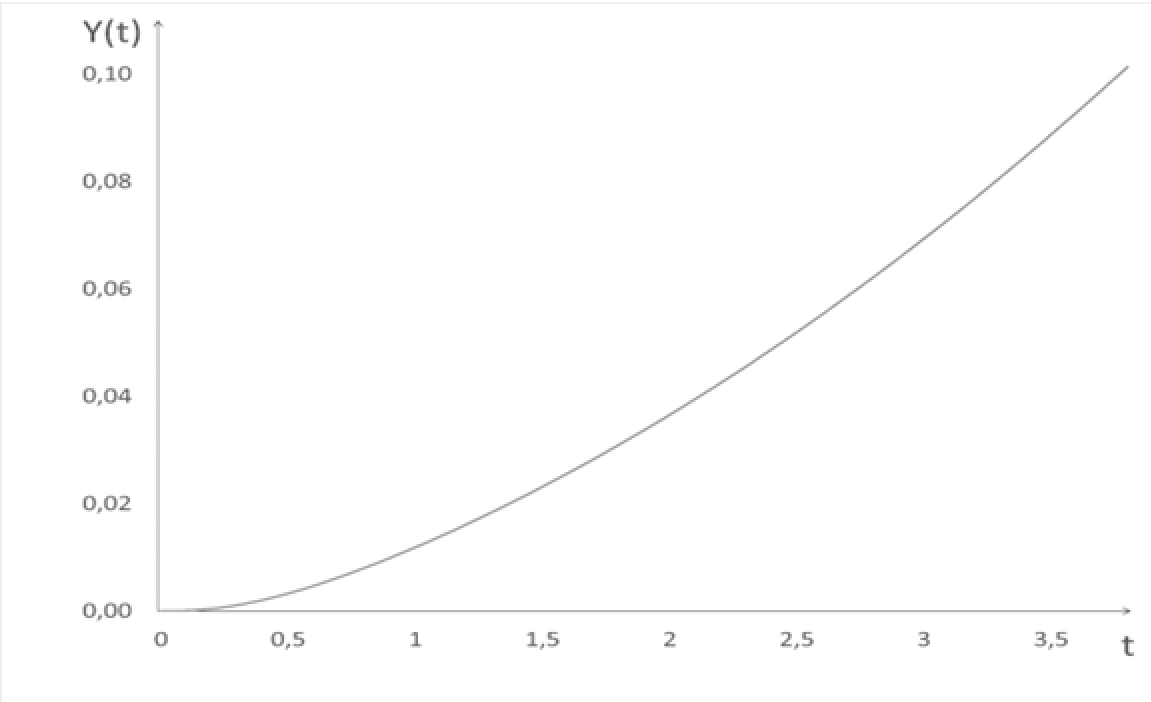

Рисунок 1 - Графическое представление $\mathbf{Y(t)}$ согласно (11) при

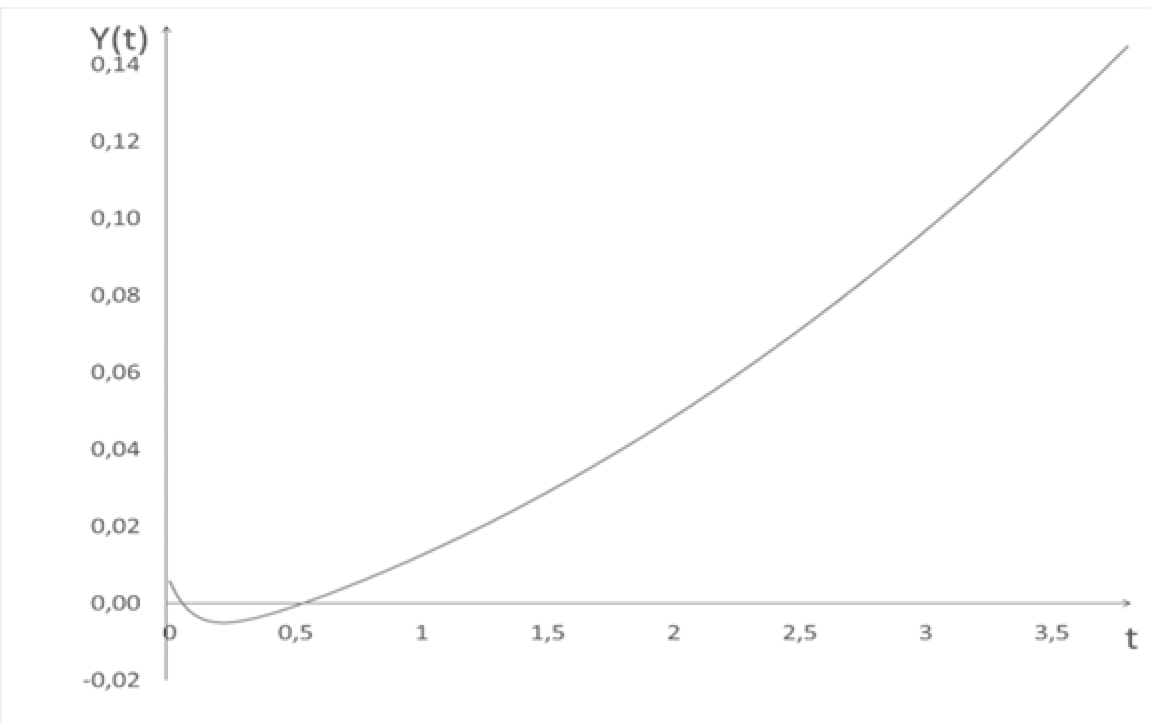

Рисунок 2 - Графическое представление $\mathbf{Y(t)}$ согласно (12) при $\boldsymbol{\eta = 5, \omega_0 = 4, 0 \leq t \leq 3.8}$.

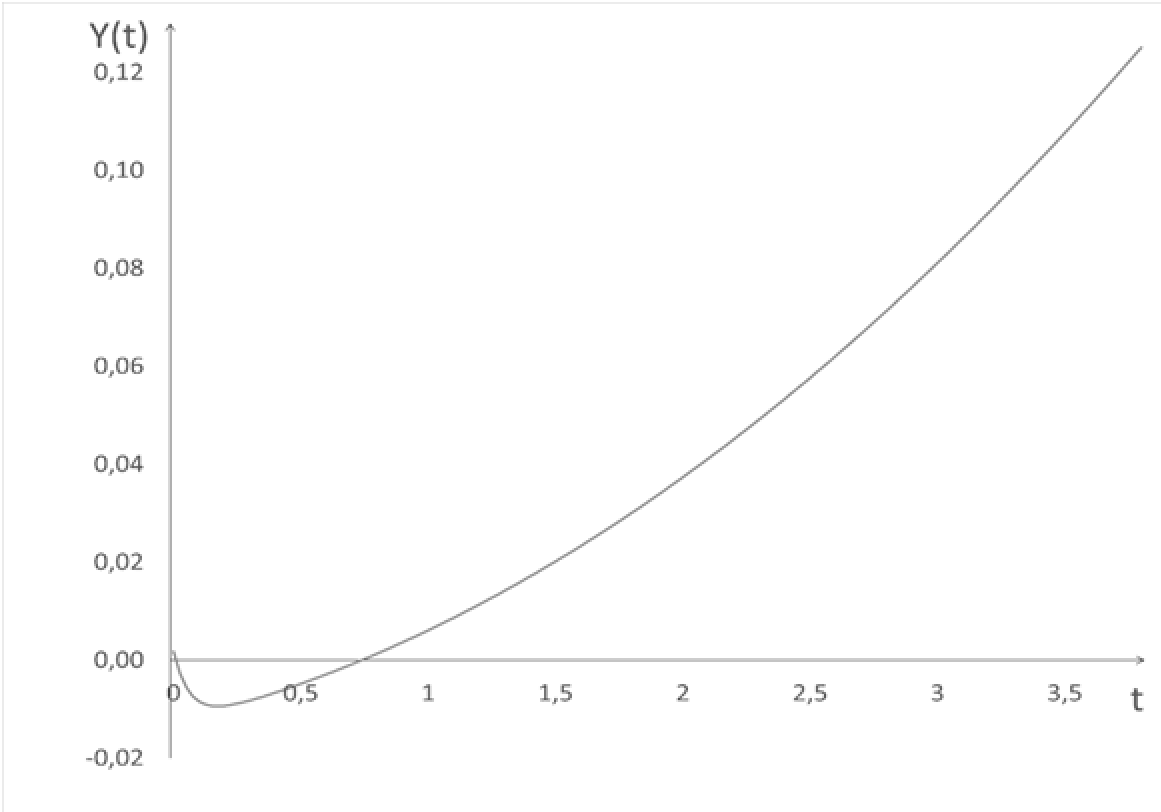

Рисунок 3 - Графическое представление $\mathbf{Y(t)}$ согласно (12) при $\boldsymbol{\eta = 8, \omega_0 = 4, 0 \leq t \leq 3.8}$.

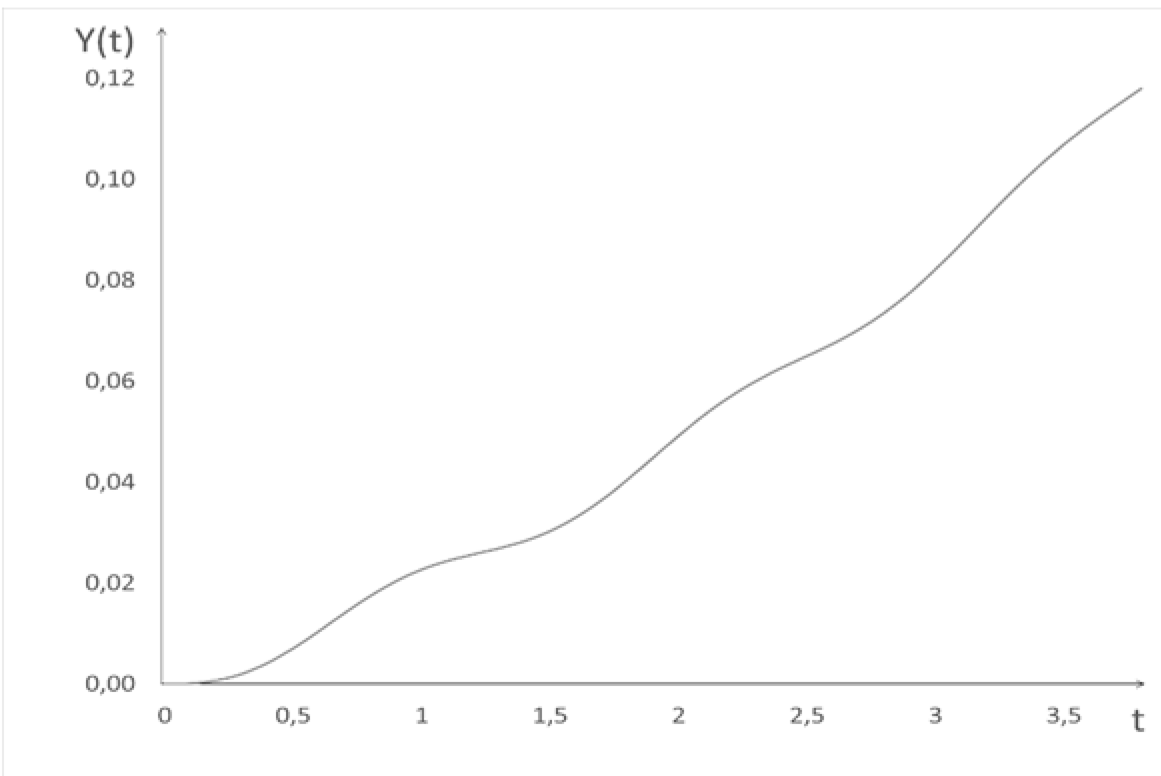

Рисунок 4 - Графическое представление $\mathbf{Y(t)}$ согласно (13) при $\boldsymbol{\eta = 0.1, \omega_0 = 5, 0 \leq t \leq 3.8}$.

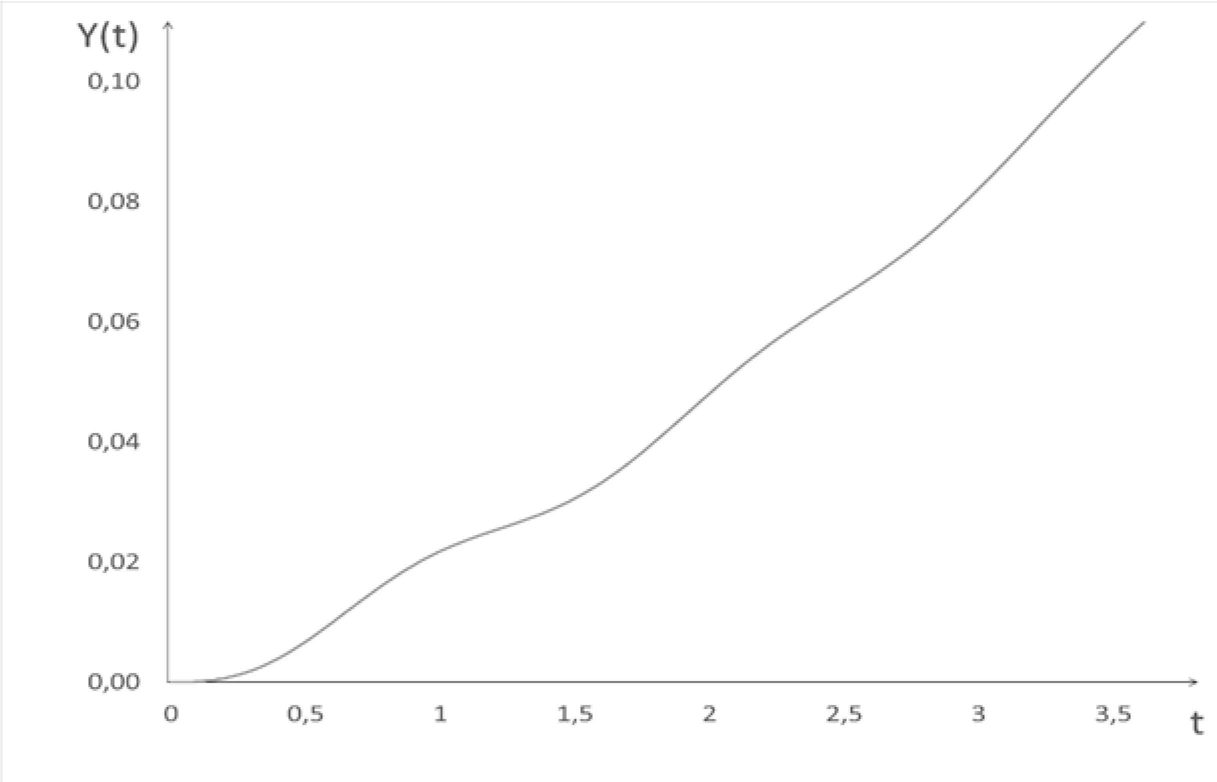

Рисунок 5 - Графическое представление $\mathbf{Y(t)}$ согласно (13) при $\boldsymbol{\eta = 0.3, \omega_0 = 5, 0 \leq t \leq 3.8}$.

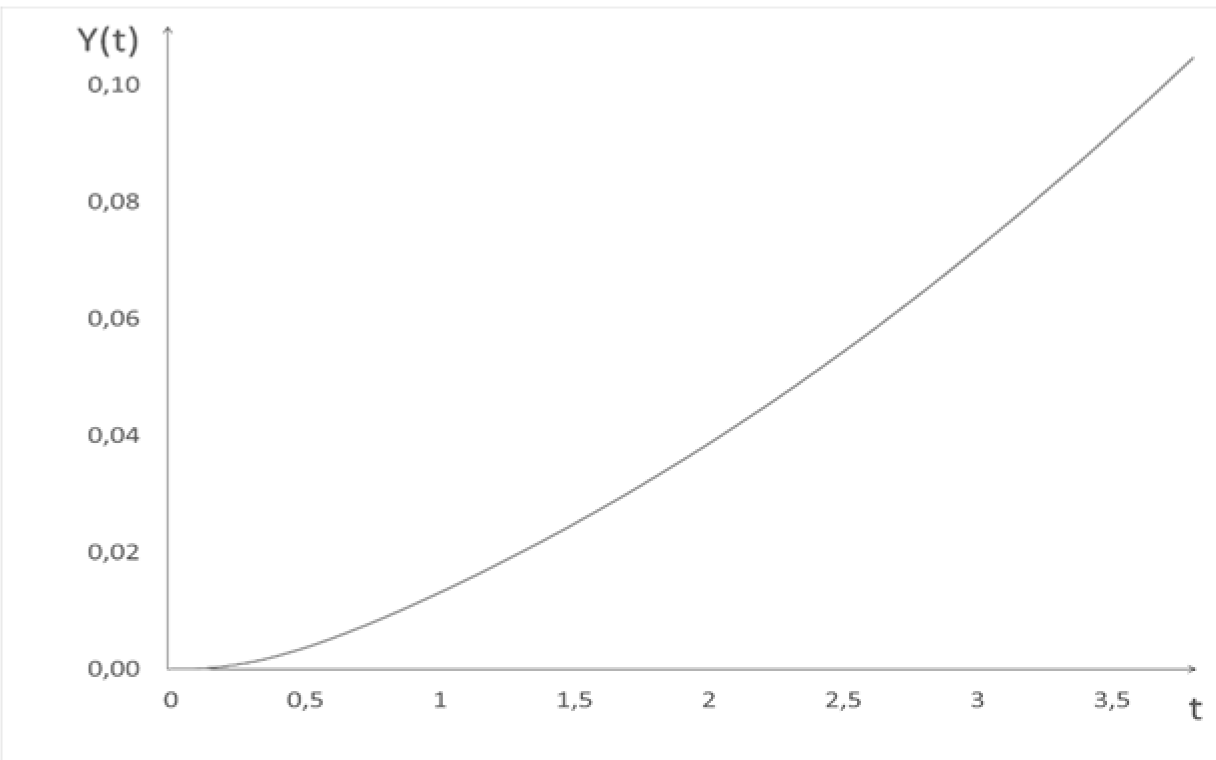

Рисунок 6 - Графическое представление $\mathbf{Y(t)}$ согласно (13) при $\boldsymbol{\eta = 4, \omega_0 = 5, 0 \leq t \leq 3.8}$.

Графики на рисунках 1-5 построены согласно аналитическим результатам, полученными в работе. Как видно из графиков, национальный доход является возрастающей функцией. При этом динамика роста может быть разнообразной. На рисунках 1-3 $Y(t)$ с увеличением t возрастает приблизительно как парабола. Но с увеличением параметра η при постоянном значении ω_0 $Y(t)$ возрастает медленнее. Из рисунков 3а) и 3б) следует, что возрастание $Y(t)$ имеет колебательный характер. Причём, по мере роста трансакционных затрат (рост параметра η), график возрастания $Y(t)$ постепенно теряет свою колебательную структуру, становясь более монотонным (см., рис. 3в)).

Заключение

Изучение аналитических выражений для $Y(t)$, полученных при решении поставленной задачи, и их визуализация демонстрируют, что динамика национального дохода в зависимости от взаимосвязи величин η и ω_0, с течением времени может проявляться двояко: либо в виде монотонного возрастания, либо в форме волнообразного увеличения.

Библиография

1. Царёв И.Г. Физико – математические модели в экономике . М.: URSS, ЛЕНАНД. 2005. 216 с.
2. Царёв И.Г. Динамические системы в экономике // Научно – практический журнал. Аудит и финансовый анализ. 2006. № 3. С. 285 – 303.
3. Чернявский Д.С. Об эконофизике и её месте в современной теоретической экономике // Успехи физических наук. 2011. Т. 181. № 7. С. 767 – 773.
4. Бурлачков В. Экономическая наука и эконофизика: главные темы диалога // Вопросы экономики. 2007. № 12. С. 111 – 122. https:// doi. org / 10. 32609/0042–8736–2007–12–111–122.
5. Дубовиков М.М., Старченко Н.В. Эконофизика и фрактальный анализ финансовых временных рядов // Успехи физических наук. 2011. Т. 181. № 7, С. 779 – 786. DOI: 10.3367/UFNr.0181.201107k.0779.
6. Косьянов П.В. Физическая экономика – наука благоденствия // Экономика и предпринимательство. 2010. № 3 (14). С. 5 – 14.
7. Геворкян Э.А. Характер изменения национального дохода в модели гармонического осциллятора при линейной зависимости внешних инвестиций от времени // Вестник алтайской академии экономики и права. 2023. № 5. С. 58 – 63.
8. Конторов Д.С., Михайлов Н.В., Саврасов Ю.С. Введение в физическую экономику. М.: Радио и связь. 2001. 160 с.
9. Геворкян Э.А. Изменение национального дохода в зависимости от времени в модели осциллятора с внешней нелинейной инвестицией // Экономика: вчера, сегодня, завтра. 2024. Т. 14. № 7А. С. 8 – 13.
10. Окунев О.Б. Динамическое моделирование макроэкономических систем: эндогенные модели Н. Калдора и М. Калецкого // Вестник МГИМО – Университета. 2011. 1 (16). С. 201 – 206.
11. Эльсгольц Л.Э. дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: УОУО Media. 2012. 424 с.

Dynamics of National Income in a Physical Oscillator Model

Eduard A. Gevorkyan

Doctor of Physical and Mathematical Sciences,
Professor,
Professor of Mathematical and Natural Science Disciplines Department,
S.Y. Witte Moscow University,
115432, 12/1, 2nd Kozhukhovskiy lane, Moscow, Russian Federation;
e-mail: gevor_mesi@mail.ru

Abstract

This research analyzes the dynamics of national income in an oscillator model. The model considers transaction costs and is described by an inhomogeneous differential equation in which investments play the role of external driving force. It is assumed that the dependence of investments on time is specified nonlinearly according to Nicholas Kaldor's model. To find the solution of the differential equation, approximation in the vicinity of the inflection point of the external investment function is used, employing the expansion of this function according to Taylor's formula with a limited number of terms. The research analyzes various cases of national income change over time, depending on the interrelationship of its defining parameters. When solving the differential equation, Euler's method, selection method, and Cauchy initial conditions were applied. Analytical results, presented in the form of graphs, demonstrate monotonic growth and oscillatory growth of national income.

For citation

Gevorkyan E.A. (2025) Dinamika natsional'nogo dokhoda v modeli fizicheskogo ostsillyatora [Dynamics of National Income in a Physical Oscillator Model]. *Ekonomika: vchera, segodnya, zavtra* [Economics: Yesterday, Today and Tomorrow], 15 (8A), pp. 34-42. DOI: 10.34670/AR.2025.37.59.004

Keywords

Oscillator, differential equation, national income, external investments, Kaldor's model, economic dynamics, mathematical modeling.

References

1. Tsarev I.G. Physical and Mathematical Models in Economics. M. URSS, LENAND, 2005.216 p.
2. Tsarev I.G. Dynamic Systems in Economics // Scientific and Practical Journal. Audit andFinancial Analysis. 2006. No. 3. Pp. 285 – 303.
3. Chernyavskiy D.S. On Econophysics and Its Place in Modern Theoretical Economics // Advances in Physical Sciences. 2011. V. 181. No. 7. Pp. 767 – 773.
4. Burlachkov V. Economic Science and Econophysics: Main Topics of Dialoge // Questions of Economics. 2015. No. 12. Pp. 111 – 122. https:// doi. org / 10. 32609/0042–8736–2007–12–111–122.
5. Dubovikov M.M., Starchenko N.V. Econophysics and fractal analysis of financial time series // Uspekhi Fizicheskikh Nauk. 2011. Vol. 181. No. 7, Pp. 779 – 786. DOI: 10.3367/UFNr.0181.201107k.0779.

6. Kosyanov P.V. Physical Economics – the Science of Prosperity // Economy and Entrepreneurship. 2010. No. 3 (14). Pp. 5 – 14.
7. Gevorkyan E.A. The Nature of Changes in National Income in the Harmonic Oscillator Model with a Linear Dependence of Foreign Investment on Time // Bulletin of the Altai Academy of Economics and Law. 2023. No. 5. P. 58–63.
8. Karnilova A. Yu.Physical Economy in the Context of Modern Economic Problems // Economic Science of Modern Russia. 2023. No. 2(101). Pp. 17 – 31.
9. Gevorkyan E.A. Change in National Income Over Time in an Oscillator Model with External Nonlinear Investment // Economics: Yesterday, Today, Tomorrow. 2024. V. 14. No. 7A. Pp. 8 –13.
10. Okunev O.B. Dynamic Modeling of Macroeconomic Systems: Endogenous Models of N. Kaldor and M. Kaletsky // Bulletin of MGIMO University. 2011. 1 (16). P. 201 – 206.
11. Elsgolts L.E. Differential Equations and Calculus of Variations. M.; YOYO Media. 2012. 424 p.