

**УДК 512.64****Задания повышенной трудности по линейной алгебре для подготовки к студенческим математическим олимпиадам****Сергеев Александр Эдуардович**

Кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра высшей математики,  
Кубанский государственный аграрный университет им. И.Т. Трубилина,  
350044, Российская Федерация, Краснодар, ул. Калинина, 13;  
e-mail: galua1979@yandex.ru

**Соколова Ирина Владимировна**

Кандидат педагогических наук, доцент, кафедра высшей математики,  
Кубанский государственный аграрный университет им. И.Т. Трубилина,  
350044, Российская Федерация, Краснодар, ул. Калинина, 13;  
e-mail: irin-sokolova@yandex.ru

**Аннотация**

Статья посвящена методическим аспектам разработки и проведения занятий по дисциплине «Линейная алгебра» с обучающимися младших курсов вузов с целью их подготовки к участию в студенческих олимпиадах по этой дисциплине. На основе анализа теоретических исследований и научно-методических публикаций по проблемам предметных студенческих олимпиад уточнены локальные цели подготовки к олимпиадам, учитывающие содержание олимпиадных заданий и олимпиадную специфику. Разработана система творческих задач для подготовки к студенческим математическим олимпиадам в сельскохозяйственном вузе, методика работы со студентами младших курсов вуза при подготовке к олимпиадам по математическим дисциплинам. Авторами проделана работа по анализу содержания дисциплины «Линейная алгебра», рабочих программ с целью выявления, подбора и соответствующей подачи на лекциях и практических занятиях заданий повышенной трудности, решения которых помогут обучающимся разных факультетов при подготовке к студенческой олимпиаде. Приводится авторский вариант составления заданий для внутривузовского этапа студенческой олимпиады. Подбранная по указанной дисциплине совокупность задач направлена на формирование умений, необходимых для успешного решения олимпиадных заданий. Разработанная авторами методика проведения занятий со студентами может использоваться для успешной их подготовки к олимпиадам по различным разделам высшей математики.

**Для цитирования в научных исследованиях**

Сергеев А.Э., Соколова И.В. Задания повышенной трудности по линейной алгебре для подготовки к студенческим математическим олимпиадам // Педагогический журнал. 2019. Т. 9. № 2А. С. 246-253.

**Ключевые слова**

Студенческие математические олимпиады, методика решения олимпиадных задач, задачи повышенной трудности, линейная алгебра.

## Введение

Сохранение и развитие научного потенциала молодежи – задача любого динамично изменяющегося общества. Минобрнауки России в 2016 году утвердил регламент проведения Всероссийской олимпиады студентов (ВСО) [Регламент организации и проведения Всероссийской олимпиады, www...], согласно которому ВСО проводится ежегодно Министерством образования и науки Российской Федерации во исполнение Указа Президента Российской Федерации от 6 апреля 2006 г. № 325 «О мерах государственной поддержки талантливой молодежи» и постановления Правительства Российской Федерации от 27 мая 2006 г. № 311 «О премиях для поддержки талантливой молодежи». Соревнования проводятся поэтапно с 1 сентября по 31 мая и подразделяются на 2 группы: предметные олимпиады и олимпиады по профилю. Примерами предметных олимпиад по математике являются [Регламент организации и проведения Всероссийской олимпиады, www...]: «Математика для естественнонаучных областей»; «Математика для инженерно-технических областей»; «Математика для социально-экономических областей» и др.

ВСО состоит из отборочного и Всероссийского этапов. К отборочным этапам относятся внутривузовский и (или) региональный этапы. Отборочные этапы могут проводиться как в очной, так и заочной форме. Заключительный (Всероссийский) этап проводится Минобрнауки России в очной форме. [Регламент организации и проведения Всероссийской олимпиады, www...]. Победители Всероссийских студенческих олимпиад ежегодно награждаются премией Президента и получают дополнительные баллы для поступления в магистратуру.

Организаторы внутривузовских олимпиад, преподаватели-предметники понимают, что такая работа является важной, нужной, имеет совою историю и традиции. Однако есть понимание и того, что любому туру должна предшествовать не только большая организационная работа по проведению самой олимпиады, но и систематическая учебная, научная и методическая работа по подготовке студентов к ее участию. Преподаватель, имеющий необходимую квалификацию, желание проводить подобную работу сталкивается с отсутствием необходимой единой методики такой деятельности. В литературе встречается много сборников авторских заданий, заданий прошлых лет ВСО по предметам. Однако конкретные методические приемы, описание системы такой работы в источниках встречаются крайне редко.

Из опыта проведения преподавателями кафедры высшей математики КубГАУ внутривузовского этапа математической олимпиады на разных факультетах в разные годы, а также согласно исследованиям методистов, можно сделать вывод, что примерно половина участников не набирает по ее результатам ни одного балла. Анализируя причины такого положения дел, проводя опрос участников и организаторов, мы пришли к выводу, что сказывается отсутствие специальной систематической подготовки к олимпиаде, методики такой работы со студентами [Шамайло, 2009]. Для улучшения результатов нужна система подготовки к студенческим предметным олимпиадам, состоящая из разработанного содержания, форм, методов и средств обучения.

Таким образом, выявляется противоречие между потребностью в процессе подготовки к студенческой олимпиаде по математике в вузе и отсутствием действенных средств и методики его реализации [Шамайло, 2009]. Это и определяет актуальность нашего исследования.

*Предметом нашего исследования* является система подготовки студентов к математическим олимпиадам в сельскохозяйственном вузе.

*Цель исследования:* разработка системы заданий повышенной сложности для подготовки студентов к математическим олимпиадам, а также выявление методических приемов для ее реализации на практических занятиях по линейной алгебре в сельскохозяйственном вузе.

В соответствии с намеченной целью определим следующие *задачи*:

1. На основе анализа современных теоретических и научно-практических исследований и разработок по проблемам предметных олимпиад уточнить локальные цели подготовки к олимпиадам, учитывающие содержание студенческих математических олимпиад.
2. Разработать систему задач, предъявляемых студентам в процессе подготовки к математическим олимпиадам в сельскохозяйственном вузе.
3. Выявить и систематизировать методику практического применения системы задач по линейной алгебре для подготовки к математическим олимпиадам в сельскохозяйственном вузе.

### Материалы и методы исследования

На наш взгляд, целями подготовки к студенческим предметным олимпиадам является:

- выявление и развитие у студенческой молодежи способностей к наукам, интереса к научной деятельности;
- создание условий для развития интеллектуальных и творческих способностей бакалавров различных направлений;
- поддержка одаренных, творчески мыслящих студентов;
- пропаганда научных знаний и т.д.

Нами была разработана система задач по линейной алгебре для подготовки студентов к олимпиаде уже на 1 курсе вуза. Как известно, «Линейная алгебра» читается студентам 1 курсов вузов либо разделом высшей математики, либо отдельной дисциплиной. В КубГАУ в указанных формах отдельные элементы линейной алгебры читаются на всех факультетах, кроме юридического. Таким образом, именно задачи по линейной алгебре углубленного содержания могут быть предложены студентам как на лекционных, так и на практических занятиях после изучения базовых понятий в рамках соответствующих тем.

Основными разделами дисциплины линейная алгебра являются:

1. Матрицы и действия над ними.
2. Определители матриц.
3. Системы алгебраических уравнений.

Задачи по указанным разделам часто встречаются на этапах студенческих математических олимпиад [Новичкова, Соколова, Бочкарева, Снежкина, 2015; Шахматов, Лисок, Тарбокова, 2009; Аржанцев, Богачев, Заславский, Протасов, Райгородский, Скопенков, 2010].

После изучения матриц, их свойств и действий над ними, можно выделить следующие упражнения, которые помогут при подготовке к олимпиаде:

#### Упражнение 1.

Перемножая матрицы каких  $m \times n$  размеров можно получить матрицу размера: а)  $2 \times 1$ ; б)  $1 \times 2$ ; в)  $5 \times 5$ ; г)  $6 \times 3$ ; д)  $6 \times 6$ ? Перечислить все возможные случаи.

#### Упражнение 2.

а) Доказать, что среди всех матриц  $A$  вида  $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$  с двумя матрицами  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  и

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

одновременно коммутируют (т.е. перестановочны) лишь матрицы, которые кратны единичной, т.е. такие, что  $a = d$  и  $b = c = 0$ . Проверить, что такие матрицы коммутируют с любой матрицей порядка 2 и, следовательно это единственные матрицы с таким свойством.

б) Сформулировать аналогичное утверждение для матриц 3-го порядка.

### Упражнение 3.

а) Привести примеры таких матриц порядка 2, для которых верны следующие равенства:

1)  $A^2 = E$ ; 2)  $B^2 = \theta$  и  $B = \theta$ ; 3)  $C \cdot D = -D \cdot C$ ; 4)  $M \cdot V = \theta$  хотя  $M \neq \theta, V \neq \theta$  где

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

б) Привести примеры матриц порядка 3, обладающих свойствами аналогичными свойствам 1)–4).

Следующим важным разделом линейной алгебры являются определители и их свойства. После изучения всех важных понятий и теорем по этой теме (минор, базисный минор, алгебраические дополнения, ранг матрицы и т.д.) предлагаются следующие упражнения, решения которых помогут студентам при подготовке к олимпиаде.

### Упражнение 4.

Пусть  $A = (a_{ij})$  - невырожденная квадратная матрица с целыми коэффициентами  $(a_{ij})$ .

Доказать, что обратная матрица  $A^{-1} = (B_{ij})$  имеет все целые коэффициенты тогда и только тогда, когда  $|A| = \pm 1$ .

### Упражнение 5.

Найти ранг матрицы  $A$  в зависимости от значений параметра  $b$ :

$$A = \begin{pmatrix} b & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & b & -2 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

### Упражнение 6.

Привести пример  $3 \times 3$  матрицы  $A$  ранга  $t = \text{rg} A$ , если:  $a_1) t = 1$ ;  $a_2) t = 2$  имеющую только один базисный минор,  $a_3) t = 2$ , имеющую наибольшее возможное число базисных минор,  $a_4)$  выразить строки матрицы  $A$  линейно через строки матрицы  $A$ , проходящие через один из базисных миноров матрицы  $A$ .

### Упражнение 7.

Привести конкретные примеры  $3 \times 3$  матриц  $A, B, C, D$  таких, что  $\text{rg}(A + B) = \text{rg}(A) + \text{rg}(B)$  и  $\text{rg}(C + D) < \text{rg}(C) + \text{rg}(D)$ .

В разделе системы линейных уравнений, после изучения основных определений и теорем, можно выделить следующие упражнения, решения которых будут полезны при подготовке к олимпиадам:

### Упражнение 8.

Найти наименьшее натуральное  $k$ , при котором система линейных уравнений



решения которых могут привести к самостоятельным результатам, теоремам и открытиям.

**Задача 8.** Квадратная матрица  $H$  порядка  $n$  с коэффициентами  $\pm 1$  называется матрицей Адамара, если  $H \cdot H^T = nE$ , где  $E$  - единичная матрица  $T$  – операция транспонирования. Тогда:

а) построить матрицу Адамара второго порядка;

б) доказать, что если  $H$  – матрица Адамара порядка  $n$ , то  $\begin{pmatrix} H & H \\ -H & H \end{pmatrix}$  - матрица Адамара порядка  $2n$ ;

в) построить матрицу Адамара порядка 4;

г) построить матрицу Адамара порядка 8.

**Задача 9.** Доказать, что если 4 не делит  $n$ , то существует матрицы Адамара порядка  $n$ .

Заметим, что неизвестно до сих пор, для всякого ли натурального  $n$  делящегося на 4 существует матрица Адамара порядка  $n$ .

**Результаты исследования и их обсуждение.** Олимпиады по математике на младших курсах любого вуза – эффективный способ повышения интереса студентов к теоретическому материалу, сообщаемому на лекциях. Возможность использования теории для решения специально подобранных задач с понятным условием и с изящным, простым решением развивают у студентов интерес к дисциплине, столь необходимый при изучении математики. Эти задачи позволяют также лучше понять и соответствующий теоретический материал.

Таким образом, готовясь к олимпиадам, участвуя в олимпиадах по математике, студенты развивают и свои творческие, исследовательские способности, а это одно из главных образовательных целей преподавателя, читающего математическую дисциплину, в частности линейную алгебру.

Кроме того, при составлении олимпиадных задач по математике (в частности по линейной алгебре) особую роль играет исследовательский характер предлагаемых задач, что созвучно мысли Блеза Паскаля, относящейся к преподаванию математики: «Предмет математики настолько серьёзен, что не следует упускать ни одной возможности сделать его более занимательной».

## Заключение

Практическая значимость исследования заключается в том, что разработанная авторами методика проведения занятий со студентами может использоваться для успешной их подготовки к олимпиадам по различным разделам высшей математики.

## Библиография

1. Регламент организации и проведения Всероссийской олимпиады студентов образовательных организаций высшего образования (Всероссийская студенческая олимпиада) (утв. Минобрнауки России 11.01.2016 № ВК-4/09вн). [Электронный ресурс]. URL: <http://ivo.garant.ru/#/document/71312002> (дата обращения: 19.05.2019).
2. Шамайло О.Н. Методическая система подготовки к математическим олимпиадам в техническом вузе: автореф. дис. ... канд. пед. наук 13.00.02. Астрахань, 2009. 23 с. [Электронный ресурс]. URL: <http://nauka-pedagogika.com/pedagogika-13-00-02/dissertaciya-metodicheskaya-sistema-podgotovki-k-matematicheskim-olimpiadam-v-tehnicheskom-vuze#ixzz5oNVWYiHK> (дата обращения 10.05.2019).
3. Титов Г.Н., Соколова И.В. Дополнительные занятия по математике в 5–6 классах: Пособие для учителя. Краснодар: Кубанский государственный университет, 2003. 129 с.
4. Соколова И.В. Математический кружок в VI классе: Учеб.-метод. пособие. 2-е издание. Краснодар: КубГУ, 2013. 152 с.

5. Соколова И.В. Технология внеклассной работы по математике в V-VI классах на основе личностно ориентированного подхода: дис. ... канд. пед. наук 13.00.02. Краснодар, 2005. 213 с.
6. Власова Е.А., Попов В.С., Пугачев О.В. О математических олимпиадах для студентов технических вузов // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2017. С. 108-118.
7. Репина Е.Г. Студенческое олимпиадное движение как инструмент поиска одаренной молодежи и педагогической работы с ней: принципы организации и опыт проведения // Самарский научный вестник. 2017. Т. 6, №3 (20). С. 297-301.
8. Новичкова Т.Ю., Соколова З.П., Бочкарева О.В., Снежкина О.В. Решение задач повышенной сложности при подготовке к олимпиаде по математике // Научное обозрение. Педагогические науки. 2015. № 2. С. 195-201.
9. Шахматов В.М., Лисок А.Л., Тарбокова Т.В. Сборник олимпиадных задач по высшей математике: учебное пособие. Томск: Изд-во Томского политехнического университета. 2009. 144 с.
10. Аржанцев И.В., Богачев В.И., Заславский А.А., Протасов В.Ю., Райгородский А.М., Скопенков А.Б. Студенческие олимпиады мехмата МГУ. Мат. Просвещение. 2010.
11. Соколова И.В., Сергеев А.Э. Обучение творчеству в разных формах // Современные проблемы науки и образования. 2018. № 4. С. 97.
12. Соколова И.В., Сергеев А.Э. Внеурочная деятельность как форма интеграции науки и школьного образования // Современные наукоемкие технологии. 2018. № 9. С. 193-197.
13. Алфутова Н. Б. Устинов А. В. А45 Алгебра и теория чисел. Сборник задач для математических школ. М.: МЦНМО, 2002. 264 с.

### **Tasks of the increased difficulty on the linear algebra for preparation for student's mathematical competitions**

**Aleksandr E. Sergeev**

PhD in Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Department of Higher Mathematics,  
Kuban State Agrarian University named after I.T. Trubilin,  
350044, 13, Kalinina st., Krasnodar, Russian Federation;  
e-mail: galua1979@yandex.ru

**Irina V. Sokolova**

PhD in Pedagogical Sciences, Associate Professor, Department of Higher Mathematics,  
Kuban State Agrarian University named after I.T. Trubilin,  
350044, 13, Kalinina st., Krasnodar, Russian Federation;  
e-mail: irin-sokolova@yandex.ru

#### **Abstract**

Article is devoted to methodical aspects of development and training on discipline "The linear algebra" with students of younger courses of higher education institutions for the purpose of their preparation for participation in the student's Olympic Games on this discipline. On the basis of the analysis of theoretical researches and scientific and methodical publications on problems of the subject student's Olympic Games the local purposes of preparation for the Olympic Games considering the maintenance of Olympiad tasks and Olympiad specifics are specified. The system of creative tasks is developed for preparation for student's mathematical competitions in agricultural higher education institution, a technique of work with junior students of higher education institution by preparation for the Olympic Games on mathematical disciplines. Authors did work on the analysis of content of discipline "Linear algebra", working programs for the purpose of identification, selection and the corresponding giving at lectures and practical occupations of tasks

of the increased difficulty which decisions will help students of different faculties by preparation for the student's Olympic Games. The author's option of drawing up tasks for an intra high school stage of the student's Olympic Games is given. The first in specified discipline set of tasks is directed to formation of the abilities necessary for the successful solution of Olympiad tasks. The training technique developed by authors with students can be used for their successful preparation for the Olympic Games according to various sections of the higher mathematics.

### For citation

Sergeev A.E., Sokolova I.V. (2019) Zadaniya povyshennoy trudnosti po lineynoy algebre dlya podgotovki k studencheskim matematicheskim olimpiadam [Tasks of the increased difficulty on the linear algebra for preparation for student's mathematical competitions]. *Pedagogicheskii zhurnal* [Pedagogical Journal], 9 (2A), pp. 246-253.

### Keywords

Student's mathematical competitions, a technique of the solution of Olympiad tasks, problems of the increased difficulty, the linear algebra.

### References

1. Regulations for the organization and conduct of the All-Russian Olympiad of students of educational organizations of higher education (All-Russian Student Olympiad) (approved by the Ministry of Education and Science of the Russian Federation on January 11, 2016 No. VK-4 / 09vn). [Electronic resource]. URL: <http://ivo.garant.ru/#/document/71312002> (appeal date: 05/19/2019).
2. Shamaylo ON Methodical system of preparation for mathematical olympiads in a technical college: author. dis. ... Cand. ped. Sciences 13.00.02. Astrakhan, 2009. 23 p. [Electronic resource]. URL: <http://nauka-pedagogika.com/pedagogika-13-00-02/dissertaciya-metodicheskaya-sistema-podgotovki-k-matematicheskim-olimpiadam-v-tehnicheskomp-vuze#ixzz5oNVWYiHK> (appeal date 10/05/2019).
3. Titov G.N., Sokolova I.V. Additional classes in mathematics in grades 5-6: A manual for the teacher. Krasnodar: Kuban State University, 2003. 129 p.
4. Sokolova I.V. Mathematical Circle in Class VI: Textbook.-method. allowance. 2nd edition. Krasnodar: Kuban State University, 2013. 152 p.
5. Sokolova I.V. Technology extracurricular work in mathematics in grades V-VI based on a person-centered approach: dis. ... Cand. ped. Sciences 13.00.02. Krasnodar, 2005. 213 p.
6. Vlasova E.A., Popov V.S., Pugachev O.V. About mathematical olympiads for students of technical universities Bulletin of the Moscow State Regional University. Series: Physics and Mathematics. 2017. pp. 108-118.
7. Repin E.G. Student Olympiad movement as a tool for searching for talented youth and pedagogical work with it: principles of organization and experience of conducting Samara Scientific Journal. 2017. Vol. 6, No. 3 (20). Pp. 297-301.
8. Novichkova T.Yu., Sokolova Z.P., Bochkareva OV, Snezhkina OV Solving problems of increased complexity in preparation for the Olympiad in Mathematics Scientific Review. Pedagogical sciences. 2015. No. 2. P. 195-201.
9. Shakhmatov V.M., Lisok A.L., Tarbokova T.V. Collection of olympiad problems in higher mathematics: a tutorial. Tomsk: Publishing house of Tomsk Polytechnic University. 2009. 144 p.
10. Arzhantsev I.V., Bogachev V.I., Zaslavsky A.A., Protasov V.Yu., Raygorodsky A.M., Skopenkov A.B. Student Olympiad mehmam MSU. Mat. Education. 2010
11. Sokolov I.V., Sergeev A.E. Learning creativity in different forms Modern problems of science and education. 2018. No. 4. S. 97.
12. Sokolov I.V., Sergeev A.E. Extracurricular activities as a form of integration of science and school education Modern high technologies. 2018. No. 9. P. 193-197.
13. Alfutova N. B. Ustinov A.V. A45 Algebra and Number Theory. Collection of problems for mathematical schools. M. : MTSNMO, 2002. 264 p.