УДК 373.1 **DOI 10.34670/AR.2019.45.4.007**

Роль математической задачи в развитии интеллектуальных способностей учащихся

Чобан-Пилецкая Антонина Митрофановна

Кандидат педагогических наук,
доцент кафедры дошкольного, специального образования и педагогического менеджмента,
Приднестровский государственный университет им. Т.Г. Шевченко,
3300, Приднестровская Молдавская Республика, Тирасполь, ул. 25 Октября, 128;
e-mail: antonina.ch.piletskaia@gmail.com

Аннотация

Целью статьи является анализ особенностей интеллектуального развития обучающихся посредством математических проблем. Задачами статьи выступают характеристика понятия интеллект, характеристика основных качеств человеческого интеллекта и форм логического мышления. С помощью анализа психолого-педагогической литературы рассмотрены разные подходы педагогов-психологов к применению математической задачи в развитии интеллекта обучающихся. На основании результатов теоретического анализа автор приходит к выводу о том, что в процессе обучения задачи выполняют следующие основные функции: обучающую, развивающую, воспитывающую, контролирующую. Автор дает рекомендации по созданию условий, способствующих усилению развивающего эффекта многих задач, без ущемления эффекта остальных функций. Также автор приводит примеры задач на логическое мышление, задач на оптимизацию и описывает методы их решения.

Для цитирования в научных исследованиях

Чобан-Пилецкая А.М. Роль математической задачи в развитии интеллектуальных способностей учащихся // Педагогический журнал. 2019. Т. 9. № 4А. С. 64-72. DOI 10. 34670/AR.2019.45.4.007

Ключевые слова

Интеллект, качества интеллекта, формы логического мышления, интеллектуальные способности, логическое мышление, проблемные задачи, решение задач.

Введение

Реализация возможностей каждого человека, развитие его духовного богатства, формирование и развитие его интеллектуальных способностей начинаются с воспитания и обучения. Интеллект – это способность адаптироваться к новым ситуациям, обучению на основе опыта, пониманию и применению абстрактных концепций, использованию своих знаний. Ф.Н. Ильясов определяет интеллект как «способность системы создавать в ходе самообучения программы для решения задач определенного класса сложности и решать эти задачи» [Ильясов, 1986]. Основными качествами человеческого интеллекта являются пытливость, глубина ума, его гибкость и подвижность, логичность, доказательственность, критичность мышления, широта (креативность) мышления. Пытливость ума – стремление разносторонне познать то или иное явление в существенных отношениях. Глубина ума заключается в способности отделять главное от второстепенного, необходимое от случайного. Логичность мышления характеризуется строгой последовательностью рассуждений, учетом всех существенных сторон в исследуемом объекте, всех возможных его взаимосвязей с другими объектами.

Многие педагоги и психологи считают, что процесс решения задач является наиболее сложной из всех функций интеллекта и определяется как когнитивный процесс более высокого порядка, требующий согласования и управления более элементарными или фундаментальными навыками. Решение задач – процесс выполнения действий или мыслительных операций, направленный на достижение цели [Абельсон, 1935; Лупу, Чобан-Пилецкая, 2008; Lupu, 1993; Novick, Hurley, 2001]. Процесс решения задачи состоит из следующих основных этапов:

– обнаружение проблемной ситуации;
– постановка задачи, выявление и определение исходных данных, отношений между ними;
– определение цели и выявление отношений между целью задачи и ее исходных данных;
– нахождение решения задачи.

Поэтому задачи являются как целью, так и средством обучения. П. Линдсей и Д. Норман считают, что решение задачи представляет собой последовательный переход от одного состояния осведомленности к другому, пока не будет достигнуто требуемое окончательное состояние осведомленности, т. е. решение [Гиппенрейтер, Петухова, 1981]. Решение задач является не только одним из основных методов обучения, но и эффективным средством активизации самостоятельной деятельности учащихся. При решении задач, в первую очередь математических, развивается логическое мышление как одна из основных составляющих интеллектуального развития.

Процесс усвоения учебного материала содержит следующие этапы:

1) база понимания формируется на основе наблюдения и эксперимента и выполняет стимулирующую функцию;
2) теоретический уровень достигается в ходе осмысления всей системы эмпирических предпонятий и взаимосвязей между ними;
3) активизация стремления учащихся к применению теоретических положений на практике формируются, когда абстрактные понятия и способы рассуждений (деятельности) получают конкретные и содержательные интерпретации [Лупу, Чобан-Пилецкая, 2008].

Данная схема относится к любому учебному процессу. Принцип связи теории с практикой требует гармонические связи научных положений с практикой. В процессе преподавания математики связь с практикой осуществляется при решении задач. В процессе решения задач формируются, развиваются и закрепляются:

1) умение обобщать, рассматривать частное событие в качестве проявления общего порядка, находить роль частного в общем;
2) способность к анализу сложных жизненных ситуаций, возможность принимать правильное решение проблем и определяться в условиях трудного выбора;
3) умение находить закономерности;
4) умение логически мыслить и рассуждать, грамотно и четко формулировать мысли, делать верные логические выводы;
5) способность быстро соображать и принимать решения, находить решения в нестандартных ситуациях и развить оригинальность мыслительной деятельности;
6) навыки концептуального и абстрактного мышления, умение последовательно и логично выстраивать сложные концепции или операции и удерживать их в уме;
7) развить интеллектуальные качества, которые необходимы для дальнейшей плодотворной деятельности и адаптации в быстро меняющемся мире.

Таким образом, в процессе обучения задачи выполняют следующие основные функции: обучающую, развивающую, воспитывающую, контролирующую. В принципе, каждая задача выполняет в какой-то мере контролирующую функцию. Мы считаем, что особенно важна развивающая функция задач. Развивающий эффект многих задач можно усилить, не ущемляя эффекта остальных функций, если дополнительно:

– искать более рациональные методы решения;
– проводить после решения более глубокий анализ исходных данных;
– обсуждать определенные характеристические свойства цели задач;
– рассмотреть некоторые аналогические ситуации и т. д.

При этом преподаватель может задать учащимся вопросы различного характера, направленные на:

– сравнение, нахождение сходства и различий между определенными понятиями;
– установление характерных признаков понятий;
– установление связей между общим и конкретным, применение общего к конкретному и обнаружение общих черт в конкретных ситуациях;
– установление обратного утверждения для данного утверждения;
– нахождение более простого решения заданной задачи (при необходимости);
– нахождение по определенным критериям оптимального решения (при наличии более одного решения);
– установление причинно-следственных связей между свойствами определенных понятий.

Чтобы связь теории и практики была более осуществима, необходимо подбирать задачи, имеющие практическое содержание. Некоторые эффективные методы составления задач предложены в [Зетель, 1948; Cioban, Cioban-Pileţcaia, Sali, 2013; Lupu, 1993; Novick, Hurley, 2001; Wantzel, 1837].

Еще в Древнем Египте обучение математики осуществлялось на основе решения задач. Составлялись сборники задач с решениями, охватывающих различные жизненные ситуации. Каждое решение играет роль алгоритма для решения подобных задач. Формулы открывались эмпирическим путем, поэтому некоторые из них оказались неверными. Например, площадь произвольного четырехугольника со сторонами a, b, c, d вычислялась по формуле:

$$S = \frac{(a+c)}{2} \cdot \frac{(b+d)}{2}.$$

Эта формула дает приближенный результат только для близких к прямоугольнику фигур. Таким образом, только теория направлена на формирование и развитие активного логического мышления, нахождение правильных принципов решения задач. Более того, только при помощи логических умозаключений можно установить истинность или ложность формул и утверждений.

О роли математики и математических задач

Общеизвестно, что основными формами логического мышления являются понятия, суждения и умозаключения, а в структуре мышления можно выделить следующие логические операции: сравнение, анализ, синтез, абстрагирование, обобщение. Формы логического мышления и логические операции углубляются и развиваются при изучении теории.

Из опыта прошлых лет авторы заметили определенные трудности для учащихся и студентов в процессе решения проблем:

- недостаточно хорошо анализируют данные, чтобы установить взаимные отношения между ними при постановке задачи;
- часто теряют основную идею, которая ведет к решению проблемы;
- не уделяют должного внимания разработке плана решения проблемы;
- не всегда проверяют ответ;
- часто не видят другие способы решения проблемы;
- некоторые ученики имеют плохие навыки вычисления и поэтому основное внимание уделяют не решению проблемы, а числовым расчетам;
- иногда используют механически алгоритмы и формулы, что может привести к неправильным решениям.

Для устранения этих недостатков необходимо обратить внимание на:

- правильное использование математической терминологии;
- формирование и развитие способности правильно рассуждать с использованием математического языка;
- при решении задач использовать краткие и ясные предложения.

Отметим, что язык математики многообразен. Математические объекты школьной математики относятся к трем языкам: алгебраическому, геометрическому и теории функций. Меняя формулировку, но оставляя содержание задачи, мы фактически переводим задачу с одного языка на другой. Например, геометрическая задача о нахождение общих точек нескольких фигур на алгебраическом языке равносильна задаче нахождения решений системы уравнений. При этом замечаем, что метод координат позволяет представлять фигуру при помощи уравнений. В этом случае метод координат выступает как транслятор с геометрического языка на алгебраический или аналитический и наоборот. Этот факт говорит и об единстве математики как предмета и как метода. Переход от конкретного к абстрактному позволяет сформулировать реальную задачу в математическую на том языке, на котором задача имеет более простою и ясную формулировку, но часто выбор зависит и от способов мышления исследователя.

Примеры некоторых проблем

В этом разделе будем анализировать некоторые методы решения задач.

Задачи на логическое мышление

Весьма увлекательна на логическое мышление следующая задача Ахмеса (около 1650 г. до н.э.): Найти число, если известно, что при прибавлении к нему 2/3 его и вычитании из результата его трети получается 10.

Вот простая задача на логическое мышление.

Задача 1. Поезд шел из пункта *A* в пункт *B* без остановок со скоростью 150 км/ч. Другой поезд также без остановок шел ему навстречу из пункта *B* в пункт *A* со скоростью 150 км/ч. На каком расстоянии будут эти поезда за 1 час до их встречи?

Решение. Для решения задачи необходимо рассмотреть следующие случаи.

Случай 1. Расстояние между пунктами *A* и *B* меньше 300 км.

Случай 2. Расстояние между пунктами *A* и *B* не меньше 300 км.

В первом случае проблема не имеет решения. Во втором случае ответ – 300 км.

Задача 2. Пусть $а, в$ – натуральные числа. Доказать, что $а^3 – в^3$ делится на 9, как только $а – в$ делится на 3.

Решение. Необходимо применять разложение на множители выражения $а^3 – в^3$. Имеем $а – в = 3к$, где $к$ натуральное число.

Первый способ: Имеем $(а – в)^3 = 27k^3$ и $а^3 – в^3 = (а – в)(а^2 + ав + в^2) = (а – в)((а – в)^2 + 3ав) = 3к(9к^2 + 3ав)$. Тогда $а^3 – в^3 = 9к(3к^2 + ав)$.

Второй способ: Имеем $а = 3к + в$. Тогда $а^3 – в^3 = (3к + в)^3 – в^3 = 27к^3 + 27к^2в + 9кв^2 + в^3 – в^3 = 9(3к^3 + 3к^2в + кв^2)$.

Третий способ: $а^3 – в^3 = (а – в)^3 – 3ав(а - в) = 9(3к^3 – авк)$.

Четвертый способ: Имеем $а = 3с + р$ и $в = 3е + р$. Поэтому $а^3 – в^3 = (27с^3 + 27с^2р + 9ср^2 + р^3) - (27е^3 + 27е^2р + 9ер^2 + р^3) = 9(3с^3- 3е^3) + 9(3с^2- 3е^2)р + 9(с - е)р^2$.

Задача 3. В некоторой школе n учащихся изучают французский язык, m учащихся изучают английский язык и k учащихся изучают немецкий язык, а из них p учащихся изучают французский и английский языки, но не изучают немецкий, s учащихся изучают французский и немецкий языки, но не изучают английский, t учащихся изучают английский и немецкий языки, но не изучают французский, q учащихся изучают французский, немецкий и английский языки, где $q < p < minimum \{n, m, k\}$. Кроме того, r учащихся не изучают ни один из указанных языков. Сколько учащихся учатся в данной школе?

Решение. Составляем следующие группы учащихся: в первую группу входят r учащихся которые не изучают ни один из указанных языков; во вторую группу входят $к$ учащихся которые изучают немецкий язык; в третью группу входят $m – q – t$ учащихся которые изучают английский язык, но не изучают немецкий язык; в четвертую группу входят $n – s – p – q$ учащихся которые изучают французский язык. Тогда число $m + n + k + r – p – 2q – s$ равно количеству учащихся, которые учатся в данной школе.

Методы решения оптимальных задач

Задача нахождения наилучшего решения называется оптимизационной проблемой.

Задачи на отыскание наибольших и наименьших значений геометрических величин еще с древних времен привлекали внимание математиков. Эти задачи часто возникают в повседневной жизни, в технике, экономике.

Изопериметрическая задача датируется античными временами, и ее целью является поиск фигуры наибольшей возможной площади, граница которой имеет заданную длину. Окружность является очевидным решением задачи, но доказательство этого факта не является простой задачей. Первый прогресс на пути доказательства был сделан швейцарским геометром Якобом Штейнером в 1838 г. Доказательство Штейнера было завершено позднее некоторыми другими математиками. Метод Штейнера содержит следующие этапы.

A. Фигура, площадь которой наибольшая среди всех фигур того же периметра, должна быть выпуклой: наряду с любыми двумя точками содержать также и отрезок, соединяющий эту точку. Легко доказывается, что если фигура Ф не выпукла, то ее периметр можно уменьшить при одновременном увеличении площади, следовательно, такая фигура не может быть искомой. В самом деле, какие-то две точки *A* и *B* на границе невыпуклой фигуры соединяются хордой, частично не принадлежащей фигуре. Заменим часть периметра, идущую от *A* к *B*, хордой *AB* и обозначим вновь образовавшуюся фигуру $Ф_1$.

B. Всякая хорда, делящая пополам периметр искомой выпуклой фигуры, делит пополам и ее площадь.

C. Всякая хорда, делящая площадь искомой фигуры пополам, видна из всех точек контура фигуры под прямым углом. Из этого факта непосредственно следует, что искомая фигура – круг. Для этого утверждения доказывается следующий простой факт: из всех треугольников с двумя данными сторонами наибольшую площадь имеет тот, у которого эти стороны перпендикулярны. Если принять одну из данных сторон за основание, то высота данного треугольника будет максимальна тогда, когда она совпадает с другой стороной, т. е. между этими сторонами прямой угол; во всех остальных случаях высота меньше стороны.

Во многих задачах решение зависит от одного или нескольких параметров. Пусть $R(t)$ есть решение проблемы $P(t)$. При каких t величина $R(t)$ является максимальной или минимальной? Если $R(t) = at^2 + bt + c$, то решение задачи сводится к построению вершины параболы. В общем случае задача сводится к решению уравнения $R'(t) = 0$, где $R'(t)$ – производная функции $R(t)$. Существуют и различные геометрические методы.

Читателю, желающему ознакомиться с более сильными, но все еще элементарными приемами решения задач на максимум и минимум, можно рекомендовать книгу [Белозеров, 1975].

Следующая задача решена в «Началах» Эвклида.

Задача 4. Докажите, что из всех параллелограммов заданного периметра $2p$ наибольшую площадь имеет квадрат.

Данная задача относится к вариантам изопериметрической проблемы. Варианты изопериметрической проблемы можно получить следующим образом. Среди всех замкнутых кривых на плоскости с заданным периметром $2p$ и заданными свойствами, какая ограничивает область с максимальной площади? Зная, что круг есть решение изопериметрической проблемы, докажите, что полукруг является решением задачи Дидоны. Отметим сдедующие частные случаи изопериметрической проблемы:

– среди всех треугольников на плоскости с заданным периметром $2p$ равносторонний треугольник ограничивает область с максимальной площади;
– среди всех четырехугольников на плоскости с заданным периметром $2p$ квадрат ограничивает область с максимальной площади;

– сумма двух положительных чисел равна $2a$. Найти наибольшее произведение этих чисел;

– площадь прямоугольного треугольника равна a^2. Найти наименьшую сумму длин катетов, которую может иметь этот треугольник.

Весьма интересна следующая известная проблема.

Задача 5. У металлического листа прямоугольной формы по углам вырезаются четыре квадрата. Полученная таким образом крестообразная заготовка сгибается в прямоугольную призму без верхней крышки, а четыре шва свариваются (паяются). Требуется рассчитать размер сторон вырезаемых квадратов, при котором объем коробки будет максимальным.

Метод абстракции

Для заданной проблемы строится абстрактная модель, а затем решение абстрактной модели применяется к реальной системе. Многие практические задачи можно свести к решению уравнений или систем уравнений.

Задача 6. Масса раствора кислоты – 200 г. Если в раствор добавить 50 г кислоты, то ее процентное содержание увеличится на 15%. Сколько кислоты и сколько воды было в растворе первоначально?

Задача 7. Одна бригада выполнила какую-то работу за b часов, а вторая бригада выполнила ту же работу за c часов. Сколько времени они затратят на выполнение этой работы, если будут работать вместе?

Метод доказательства

Метод доказательства применяется, как правило, в тех случаях, когда проблема не имеет решений или не может быть решена.

Задача 8. Построить треугольник ABC, в котором $a = BC = 7, b = AC = 5, c = AB = 3$ и $\cos A = 3:10$.

Задача 9. Построить треугольник ABC, в котором $a = BC = 2, b = AC = 9$ и $\cos A = 1:5$.

Заключение

В результате исследования показано, что применение специализированного педагогического инструментария позволяет развить интеллектуальные способности обучающихся. Все это является причиной дальнейшей активизации развития методического обеспечения преподавания математики.

Библиография

1. Абельсон И.Б. Максимум и минимум. Л., 1935. 108 с.
2. Белозеров С.Е. Пять знаменитых задач древности. История и современная теория. Ростов-на-Дону, 1975. 320 с.
3. Гиппенрейтер Ю.Б., Петухова В.В. (ред.) Хрестоматия по общей психологии. Психология мышления. М., 1981. 400 с.
4. Зетель С.И. Задачи на максимум и минимум. М., 1948. 224 с.
5. Ильясов Ф.Н. Разум искусственный и естественный // Известия АН Туркменской ССР. Серия общественных наук. 1986. № 6. С. 46-54.
6. Лупу И., Чобан-Пилецкая А. Мотивация обучения математике. Кишинэу, 2008. 162 с.
7. Cioban M., Cioban-Pileţcaia A., Sali L. Rolul problemelor generale în organizarea învăţării autoreglate // Artă şi educaţie artistică. 2013. Nr. 2.
8. Lupu I. Probleme de optimizare. Chişinău: Lumina, 1993. 136 p.
9. Novick L.R., Hurley S.M. To matrix, network, or hierarchy: that is the question // Cognitive psychology. 2001. Vol. 42. No. 2. P. 158-216.
10. Wantzel P.-L. Recherches sur les moyens de reconnaître si un Problème de Géométrie peut se résoudre avec la règle et le compas // Journal de mathématiques pures et appliquées. 1837. T. 2. P. 366-372.

The role of mathematical problems in the development of intellectual abilities in schoolchildren

Antonina M. Chioban-Piletskaya

PhD in Pedagogy,
Associate Professor at the Department of preschool, special education and pedagogical management,
Taras Shevchenko Transnistria State University,
3300, 128, 25 Oktyabrya st., Tiraspol, Pridnestrovian Moldavian Republic;
e-mail: antonina.ch.piletskaia@gmail.com

Abstract

The article aims to carry out an analysis of the features of intellectual development of schoolchildren through mathematical problems. The objectives of the article include the characteristics of the concept of intelligence, the characteristics of the basic qualities of human intelligence and forms of logical thinking. Having taken into account the results of the analysis of psychological and pedagogical literature, the author of the article makes an attempt to describe various approaches of educational psychologists to the use of mathematical problems with a view to developing intellectual abilities in schoolchildren. Having performed a theoretical analysis of works by scholars in this sphere, the article points out that the main functions of problems in the educational process include the following: training, developing, educating, controlling. The author gives recommendations regarding conditions conducive to enhancing the developing effect of many mathematical problems, without prejudice to the influence of other functions. The article also deals with a number of examples of mathematical problems that can be used during lessons with a view to the development of intellectual abilities (including logical thinking, optimisation) in schoolchildren and methods of solving them, e. g. the method of abstraction, the method of proof, the method of abstraction and proof.

For citation

Chioban-Piletskaya A.M. (2019) Rol' matematicheskoi zadachi v razvitii intellektual'nykh sposobnostei uchashchikhsya [The role of mathematical problems in the development of intellectual abilities in schoolchildren]. *Pedagogicheskii zhurnal* [Pedagogical Journal], 9 (4A), pp. 64-72. DOI 10.34670/AR.2019.45.4.007

Keywords

Intelligence, qualities of intelligence, forms of logical thinking, intellectual abilities, logical thinking, problems, problem solving.

References

1. Abel'son I.B. (1935) *Maksimum i minimum* [Maximum and minimum]. Leningrad.
2. Belozerov S.E. (1975) *Pyat' znamenitykh zadach drevnosti. Istoriya i sovremennaya teoriya* [Five famous problems of antiquity. History and modern theory]. Rostov-on-Don.
3. Cioban M., Cioban-Pileţcaia A., Sali L. (2013) Rolul problemelor generale în organizarea învăţării autoreglate. *Artă şi educaţie artistică*, 2.
4. Gippenreiter Yu.B., Petukhova V.V. (eds.) (1981) *Khrestomatiya po obshchei psikhologii. Psikhologiya myshleniya* [The anthology of general psychology. The psychology of thinking]. Moscow.

5. Il'yasov F.N. (1986) Razum iskusstvennyi i estestvennyi [Artificial and natural intelligence]. *Izvestiya AN Turkmenskoi SSR. Seriya obshchestvennykh nauk* [Proceedings of the Academy of Sciences of the Turkmen SSR. Social sciences], 6, pp. 46-54.
6. Lupu I. (1993) *Probleme de optimizare*. Chişinău: Lumina.
7. Lupu I., Chioban-Piletskaya A. (2008) *Motivatsiya obucheniya matematike* [Motivation for learning mathematics]. Chișinău.
8. Novick L.R., Hurley S.M. (2001) To matrix, network, or hierarchy: that is the question. *Cognitive psychology*, 42 (2), pp. 158-216.
9. Wantzel P.-L. (1837) Recherches sur les moyens de reconnaître si un Problème de Géométrie peut se résoudre avec la règle et le compas. *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 2, 366-372.
10. Zetel' S.I. (1948) *Zadachi na maksimum i minimum* [Maximum and minimum problems]. Moscow.