УДК 371.30+51 **DOI: 10.34670/AR.2021.24.69.015**

Теоретические и методические основы изучения аксиом в курсе математики

Садовников Николай Владимирович

Доктор педагогических наук, доцент,
профессор кафедры общепрофессиональных дисциплин,
Военная академия материально-технического обеспечения (филиал г. Пенза),
440005, Российская Федерация, Пенза-5;
e-mail: sadovnikov@mail.ru

Новичкова Татьяна Юрьевна

Кандидат педагогических наук, доцент,
доцент кафедры общепрофессиональных дисциплин,
Военная академия материально-технического обеспечения (филиал г. Пенза),
440005, Российская Федерация, Пенза-5;
e-mail: sadovnikov@mail.ru

Аннотация

Выявлены функциональные различия аксиом и теорем как единой формы мышления. Разработана концепция изучения аксиом в курсе математики на основе соответствующей концепции изучения теорем. Показана реализация методики изучения аксиом в курсе планиметрии на конкретном примере. Разработана методическая схема изучения стереометрических аксиом и даны некоторые методические рекомендации по их изучению. При изучении аксиом стереометрии важно, чтобы учащиеся понимали абстрактный характер геометрических понятий, увидели процесс абстрагирования в действии, научились замечать его в жизни. Целесообразно привести примеры реальных объектов, абстрагирование от некоторых свойств которых, подводит к основным (неопределяемым) понятиям курса стереометрии, каковыми традиционно являются точка, прямая и плоскость. Можно также показать, что аксиомы появляются в результате наблюдения и абстрагирования различных видов практической деятельности людей.

Для цитирования в научных исследованиях

Садовников Н.В., Новичкова Т.Ю. Теоретические и методические основы изучения аксиом в курсе математики // Педагогический журнал. 2021. Т. 11. № 2А. С. 103-109. DOI: 10.34670/AR.2021.24.69.015

Ключевые слова

Математическая оболочка суждений, теоремы и аксиомы как разновидности математических утверждений (суждений), функциональное различие теорем и аксиом, основные понятия и отношения школьного и вузовского курсов геометрии, отношение инцидентности, особенности построения системы аксиом стереометрии, методическая схема изучения аксиом, логико-математический анализ утверждений.

Введение

Математической оболочкой суждений, являющихся одной из основных форм мышления и важнейшим объектом изучения в школьном и в вузовском курсах, являются теоремы и аксиомы. Теоремы занимают большую долю теоретического материала, изучаемого в математике, в отличие от аксиом, реальное число которых, по крайней мере в школьной математике, достаточно ограниченно. В математике роль теорем и аксиом отличается, прежде всего, функционально. Основная функция теорем – служить теоретической основой для решения практических и прикладных задач, и служить базой для осуществления доказательств последующих математических теорем. Главное функциональное предназначение аксиом – формировать базу для осуществления первых доказательств, прежде всего, в школьном курсе геометрии. В курсах же алгебры, алгебры и начал анализа они в явном виде не являются объектом изучения, да и практически не используются. Курс геометрии и в школе, и в вузе обычно строят дедуктивно, поэтому аксиоматике уделяется должное внимание. В качестве аксиом обычно берут уже известные факты из пропедевтического курса или факты, близкие к наглядным представлениям обучающихся, их жизненному опыту. Поэтому для них новым является не столько содержание, сколько предельно точный математический язык, на котором формулируются аксиомы.

Основное содержание

Теоретическая концепция изучения аксиом будет аналогичной концепции изучения теорем. Но так как аксиомы в отличие от теорем не требуют доказательства, то и при работе над ними нужно опустить этапы, связанные с поиском доказательства, характерные для работы над теоремой. А в остальном методика работы над аксиомами остается аналогичной методике изучения теорем.

Работу над изучением аксиом опишем с практических позиций. Как известно, в курсе планиметрии основными (неопределяемыми) понятиями являются точка и прямая [Погорелов, 1997]. В качестве основных отношений можно выделить: отношение принадлежности для точек и прямых, отношение лежать между, отношение порядка, отношение иметь длину, иметь градусную меру, отношение параллельности.

Аксиоматика может быть введена как в самом начале изучения геометрии, так и постепенно по мере надобности в той или иной аксиоме. При первом подходе реализуется строго дедуктивное изложение курса геометрии. Можно предположить, что основную цель изучения геометрии сторонники этого подхода видят в том, чтобы научить учащихся, студентов, прежде всего, логически мыслить, доказывать, обосновывать свои выводы, рассуждать. Сторонники второго подхода на первых занятиях учат практическим вещам с использованием геометрии: провешивать прямую на местности, измерять расстояния, выкладывать мозаику из многоугольников и т.д. Аксиоматика в явном виде на первых порах может отсутствовать. В таком учебнике некоторые из аксиом появляются по мере надобности и упор делается на наглядно-интуитивные представления обучаемых. Такой подход говорит о другом видении главной цели изучения геометрии, которая состоит в практическом применении изучаемого предмета в жизни.

Создание внутренней мотивации для изучения аксиом в начале школьного курса планиметрии, на наш взгляд, достаточно проблематично. Легче будет реализовать это в начале курса стереометрии, когда обучаемые приобретут свой собственный опыт в изучении геометрии. К этому времени они поймут какова основная цель введения аксиом в геометрии и почему их нужно изучать в школе.

В вузе проблема аксиоматического построения курса геометрии не стоит, но для повышения научности изучаемого предмета имеет смысл напомнить и систематизировать сведения о сути аксиоматического построения какой-либо теории, в частности, математики (геометрии).

Реализацию методики изучения аксиом в курсе планиметрии на примере работы над основными свойствамипринадлежности точек и прямых на плоскости. Это самая первая аксиома школьного курса геометрии:

I. Какова бы ни была прямая, существуют точки, принадлежащие прямой и точки, не принадлежащие ей. Через любые две точки можно провести прямую, и только одну [Погорелов, 1997].

На наш взгляд изучение этой аксиомы I должно предваряться рисунками с небольшими комментариями учителя, направленными на достижение понимания учащимися отношения «принадлежать» для точек. Рисунок может выглядеть так:

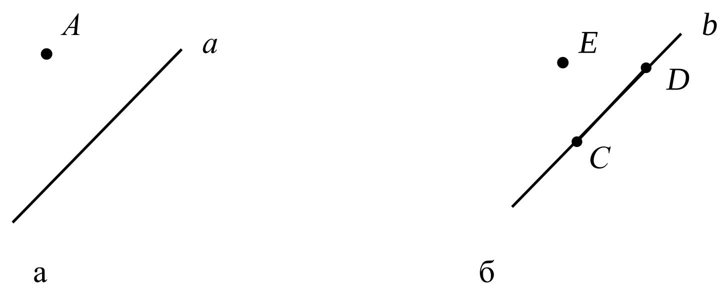

Рисунок 1 – Иллюстрирование аксиомы I

Комментарий учителя может быть следующим: на рисунке а изображены точка A и прямая a. Их взаиморасположение можно описать по-разному. Можно сказать, что точка A не лежит на прямой a, можно сказать также, что прямая a не проходит через точку A. Но мы будем говорить, что точка A не принадлежит прямой a. На втором рисунке изображены три точки C, D, E ипрямая b. Про взаимное расположение точки C и прямой b можно сказать, что точка C лежит на прямой b,точка C находится на прямойb, прямая b проходит через точку C. Мы договоримся с вами описывать эту ситуацию фразой – точка C принадлежит прямой b. Аналогично можем сказать, что точка D принадлежит прямой b, а точка E не принадлежит прямой b. Можно говорить, что точки C и Dпринадлежат прямой b, а можно – прямая b проведена через точки C и D. Далее даем четкую формулировку аксиомы. По возможности формулировка должна быть точь-в-точь такой же, как в учебнике.

На этапе усвоения формулировки целесообразно провести ее логический анализ, который должен помочь быстрее привыкнуть к предельно точной математической форме изложения фактов, развивать математическую речь, облегчить запоминание формулировки аксиомы. Этот анализ можно направить следующими вопросами к обучающимся:

Преподаватель. О каких геометрических фигурах говорится в аксиоме I?

Обучаемый. В этой аксиоме говорится о точках и прямой.

Преподаватель. Что именно говорится о прямых?

Обучаемый. В первой части говорится, что данная прямая – «какова бы ни была». А во второй – что «через любые две точки всегда можно провести одну прямую».

Преподаватель. Что говорится о точках?

Обучаемый. Всегда существуют точки, принадлежащие данной прямой, и точки, не принадлежащие прямой.

Преподаватель. Сколько утверждений сформулировано в аксиоме I?

Обучаемый. В этой аксиоме можно выделить четыре утверждения.

Преподаватель. Сформулируйте их по отдельности.

Обучаемый. Первое утверждение – какова бы ни была прямая, существуют точки, принадлежащие этой прямой. Второе – какова бы ни была прямая, существуют точки, не принадлежащие ей. Третье – через любые две точки можно провести прямую, четвертое – эта прямая единственная.

Преподаватель. Какими другими словами можно заменить фразу: «Какова бы ни была прямая»?

Обучаемый. Для любой прямой или для каждой прямой.

Суть предыдущего описанного выше этапа – добиться первичного понимания всех слов, содержащихся в формулировке аксиомы. Это особенно актуально для школьного курса планиметрии и понятно, что в вузе нелегко заниматься этими вещами.

Для первичного закрепления данной аксиомы можно предложить следующий математический диктант:

1. Постройте прямую a. Отметьте точки A и B, принадлежащие прямой a. Постройте точки C и D, не принадлежащие прямой a.

2. Постройте две пересекающиеся прямые c и d. Обозначьте буквой A точку пересечения этих прямы. Постройте точку E, принадлежащую прямой c и не принадлежащую прямой d. Постройте точку F, принадлежащую прямой d, но не принадлежащую прямой c.

По аналогичной методической схеме можно вводить остальные аксиомы в школьном курсе планиметрии.

Построение системы аксиом курса стереометрии обычно осуществляется с помощью следующих действий [Садовников, Шакирзянова, 2015]:

а) переформулируются аксиомы планиметрии для пространства;

б) добавляются новые «специфические» аксиомы стереометрии.

Первое действие выполняется с помощью соглашения (можно в виде отдельной аксиомы) о том, что в каждой плоскости пространства выполняются все уже известные аксиомы планиметрии. Второе действие состоит в формулировке нескольких аксиом принадлежности (инцидентности) для пространства.

При изучении аксиом стереометрии важно, чтобы учащиеся понимали абстрактный характер геометрических понятий, увидели процесс абстрагирования в действии, научились замечать его в жизни. Целесообразно привести примеры реальных объектов, абстрагирование от некоторых свойств которых, подводит к основным (неопределяемым) понятиям курса стереометрии, каковыми традиционно являются точка, прямая и плоскость. Можно также показать, что аксиомы появляются в результате наблюдения и абстрагирования различных видов практической деятельности людей. Например, одна из аксиом группы С, постулируя тот факт, что если две различные прямые имеют общую точку, то через них можно провести прямую, и притом только одну, возможно появилась в результате абстрагирования деятельности столяра по предварительной проверке касания четырех ножек стула с полом при помощи нитей, натянутых между ножками по диагонали и отсутствия прогала между ними (т.е. наличия у них общей точки). Как было выделено выше, система аксиом стереометрии состоит из аксиом планиметрии и аксиом группы С, описывающих основные свойства плоскости в пространстве. В планиметрии мы работаем в одной плоскости. И в этой плоскости рассматриваем различные фигуры и их взаимное положение. В стереометрии бесконечно много плоскостей. Поэтому формулировки некоторых аксиом планиметрии, при выходе ив пространство (в стереометрию), требует уточнения. Например, планиметрическую аксиому «прямая разбивает плоскость на две полуплоскости» как стереометрическую аксиому следует читать в следующей редакции: «прямая, принадлежащая плоскости, разбивает эту плоскость на две полуплоскости».

Для изучения собственно стереометрических аксиом (группы С) предлагаем методическую схему:

1. Разъяснить абстрактный характер геометрических понятий.
2. Выявить сущность аксиом и их роль в построении геометрии.
3. Озвучить формулировки аксиом, проиллюстрировать их на моделях (можно использовать стереометрический ящик, окружающую обстановку, в том числе «геометрию» классной комнаты, подручные средства: карандаш, ручка, журнал, учебник).
4. Усвоение аксиом путем логического анализа их формулировок. (Анализ может направляться вопросами, аналогичными вопросам для логического анализа формулировок аксиом планиметрии).
5. Закрепление аксиом в процессе их применения к выводу первых следствий геометрии в пространстве.
6. Применение аксиом группы С к решению стереометрических задач.

После введения самих аксиом доказываются первые следствия из них. Именно на этих доказательствах прослеживается важная роль аксиом при построении геометрии. Чтобы обучающиеся ярче могли выделить используемы в доказательствах предложения, предлагаем эти доказательства оформить в виде таблицы с двумя колонками, выделяя отдельно утверждения и обоснования.

Методически целесообразно осуществлять логико-математический анализ утверждений, который предполагает [Садовников, 2005]:

а) выделение условия, разъяснительной части и заключения утверждения;

б) установление факта, какое дано утверждение – простое или сложное.

Например, в признаке делимости на 3 можно выделить такие компоненты:

- условие - «сумма цифр числа n делится на 3»;
- заключение – «само число n делится на 3»;
- разъяснительная часть – «n – натуральное число» (оно в явном виде отсутствует). Используя логические символы, утверждение можно записать следующим образом: (сумма цифр числа n делится на 3), следовательно (число n делится на 3). Так как в утверждении одно условие и одно заключение, то оно простое.

Заключение

Указанные методические разработки могут быть использованы при проведении занятий по геометрии и стереометрии с целью повышения эффективности усвоения теорем и аксиом. Показано, что предлагаемые методики позволяют расширить возможности повышения компетенций в части освоения теоретического материала.

Библиография

1. Васильева Г. Н. О подготовке студентов математического факультета к реализации деятельностного подхода при обучении математике в средней школе //Пермский педагогический журнал. – 2016. – №. 8.
2. Герасимчук А. В. Обзор состояния освещения аксиом, теорем, доказательств в школьном курсе «Геометрия 5-11» //Вестник магистратуры. – 2018. – №. 1-1. – С. 47.
3. Горбачев В. И. Развитие аксиоматического метода в содержании общеобразовательного курса математики //Вестник калужского университета. – 2009. – №. 3. – С. 31-38.
4. Михеев Ю. В. Научно-методические основы разработки школьного многоуровневого математического образования в контексте развития математической одаренности детей (на примере изучения геометрии) : дис. – ЮВ Михеев, 2008.
5. Погорелов А.В. Геометрия: Учеб. для 7-11-х кл.общеобразоват.учреждений/ А.В.Погорелов. – 7-е изд. – М.: Просвещение, 1997. – 383с.
6. Садовников Н. В. Основные компоненты содержания школьного курса математики как основа разработки методики обучения математике в средней школе //XXI век: итоги прошлого и проблемы настоящего плюс. – 2015. – Т. 3. – №. 6. – С. 132.
7. Садовников Н. В. Теоретико-методологические основы методической подготовки учителя математики в педвузе в условиях фундаментализации образования //автореферат дис.... д-ра пед. наук. Саранск. – 2007.
8. Садовников Н. В., Пудовкина Ю. Н. Методические основы работы над понятиями в школьном курсе математики //XXI век: итоги прошлого и проблемы настоящего плюс. – 2015. – Т. 3. – №. 6. – С. 127.
9. Садовников Н.В. Методическая подготовка учителя математики в педвузе в контексте фундаментализации образования: Монография. Пенза, 2005. – 283с.
10. Садовников Н.В., Шакирзянова О.Г. Методические основы обучения теоремам в школьном курсе математики.// Научное периодическое издание «JNSITU», №4. – 2015. – с.112-115.

Theoretical and methodological foundations of the study of axioms in the course of mathematics

Nikolai V. Sadovnikov

Doctor of Pedagogical Sciences, Associate Professor,
Professor of the Department of General Professional Disciplines,
Military Academy of Material and Technical Support (Penza branch),
440005, Penza-5, Russian Federation;
e-mail: sadovnikov@mail.ru

Tat'yana Yu. Novichkova

PhD in Pedagogy, Associate Professor
Associate Professor of the Department of General Professional Disciplines
Military Academy of Material and
Technical Support (Penza branch),
440005, Penza-5, Russian Federation;
e-mail: sadovnikov@mail.ru

Abstract

Functional differences of axioms and theorems as a single form of thinking are revealed. The concept of studying axioms in the course of mathematics is developed on the basis of the corresponding concept of studying theorems. The implementation of the methodology for studying axioms in the course of planimetry is shown on a specific example. A methodological scheme for studying stereometric axioms is developed and some methodological recommendations for their study are given. When studying the axioms of stereometry, it is important that students understand the abstract nature of geometric concepts, see the process of abstraction in action, learn to notice it in life. It is advisable to give examples of real objects, abstracting from some of the properties of which leads to the main (undetectable) concepts of the course of stereometry, which are traditionally a point, a straight line and a plane. It can also be shown that axioms appear as a result of observing and abstracting various types of practical activities of people.

For citation

Sadovnikov N.V., Novichkova T.Yu. (2021) Teoreticheskie i metodicheskie osnovy izucheniya aksiom v kurse matematiki [Theoretical and methodological foundations of the study of axioms in the course of mathematics]. *Pedagogicheskii zhurnal* [Pedagogical Journal], 11 (2A), pp. 103-109. DOI: 10.34670/AR.2021.24.69.015

Keywords

Mathematical «shell» of propositions, theorems and axiomsas varieties of mathematical statements (propositions), a functional difference between axioms and theorems, basic notions and relations of school and university geometrycourses, an incidence relation, features of the construction of the system of axioms of solid geometry, a methodological scheme of the study of axioms, a logical and mathematical analysis of statements.

References

1. Vasilyeva G. N. On the preparation of students of the Faculty of Mathematics for the implementation of an activity-based approach to teaching mathematics in secondary school //Perm Pedagogical Journal. - 2016. - No. 8.
2. Gerasimchuk A.V. Review of the state of illumination of axioms, theorems, proofs in the school course "Geometry 5-11" //Bulletin of the Magistracy. - 2018. - No. 1-1. - p. 47.
3. Gorbachev V. I. Development of the axiomatic method in the content of the general education course of mathematics //Bulletin of the Kaluga University. - 2009. - No. 3. - pp. 31-38.
4. Mikheev Yu. V. Scientific and methodological foundations of the development of school multilevel mathematical education in the context of the development of mathematical giftedness of children (on the example of studying geometry): dis. - Yu. Mikheev, 2008.
5. Pogorelov A.V. Geometry: Studies for 7-11 grades of general education.institutions/ A.V. Pogorelov. - 7th ed. - Moscow: Prosveshchenie, 1997 – - 383s.
6. Sadovnikov N. V. The main components of the content of the school course of mathematics as the basis for the development of methods of teaching mathematics in secondary school / / XXI century: results of the past and problems of the present plus. - 2015. - Vol. 3. - No. 6 – - p. 132.
7. Sadovnikov N. V. Theoretical and methodological foundations of methodological training of a mathematics teacher in a pedagogical university in the conditions of fundamentalization of education / / abstract of dis.... doctor of pedagogical sciences. Saransk. - 2007.
8. Gardeners N. V. Pudovkin Yu. N. Methodological basis of the work on the concepts in the school mathematics course //XXI century: results of the past and the present problem is a plus. – 2015. – T. 3. no. 6. – P. 127.
9. Gardeners N. In. Methodical preparation of teachers of mathematics at the pedagogical University in the context of the strengthening of education: Monograph. Penza, 2005. – 283s.
10. Sadovnikov N. V., Shakirzyanova O. G. Methodological foundations of teaching theorems in the school course of mathematics.// Scientific periodical "JNSITU", No. 4. - 2015. - pp. 112-115.