УДК 372. 851 DOI: 10.34670/AR.2026.21.18.023

О различных подходах к решению задач с параметром на едином государственном экзамене по математике

Володина Евгения Валерьевна

Кандидат педагогических наук, доцент,
доцент кафедры высшей математики
и теоретической механики им. С.Ф. Сайкина,
Чувашский государственный университет им. И.Н. Ульянова,
428000, Российская Федерация, Чебоксары, Московский просп., 15;
e-mail: evg_volodina@mail. ru

Ефимова Елена Геннадьевна

Кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры актуарной и финансовой математики,
Чувашский государственный университет им. И.Н. Ульянова,
428000, Российская Федерация, Чебоксары, Московский просп., 15;
e-mail: eg-fmf@mail. ru

Сироткина Марина Евгеньевна

Кандидат физико-математических наук, доцент,
доцент кафедры высшей математики
и теоретической механики им. С.Ф. Сайкина,
Чувашский государственный университет им. И.Н. Ульянова,
428000, Российская Федерация, Чебоксары, Московский просп., 15;
e-mail: sme74@mail. ru

Аннотация

В статье анализируется динамика результатов выполнения заданий на ЕГЭ по математике в Чувашской Республике. Изучаются разные подходы к решению задач с параметром. Показано, что метод решения может существенно отличаться от представленного в критериях. В зависимости от выбранного метода решения задачи критерии оценивания нуждаются в уточнении и, в некоторых случаях, в изменении. Всё перечисленное требует от эксперта ЕГЭ по математике нешаблонного подхода к проверке решений задач с параметром.

Для цитирования в научных исследованиях

Володина Е.В., Ефимова Е.Г., Сироткина М.Е. О различных подходах к решению задач с параметром на едином государственном экзамене по математике // Педагогический журнал. 2026. Т. 16. № 3А. С.177-185. DOI: 10.34670/AR.2026.21.18.023

Ключевые слова

Единый государственный экзамен по математике, математика, задачи с параметром, альтернативный подход, аналитический метод, графический метод, оценивание решений.

Введение

Задачи с параметрами в рамках решаемых вариантов на едином государственном экзамене относятся к заданиям повышенной сложности, так как не предполагают единого подхода к их решению. Это особый класс математических задач, спецификой которых является присутствие в условии, наряду с неизвестными переменными, особых величин – параметров. Численные значения параметров в условиях задач не указываются конкретно, но предполагаются известными и заданными на некотором числовом множестве. При этом значения параметров существенно влияют на логический и технический ход решения задачи, на существование и единственность решения, а также форму ответа. Наличие в условии задачи дополнительных характеристик, усложняющих стандартное решение, приводит к существенному увеличению объема исследований в таких задачах. А значит, от обучающихся требуется глубокое знание предмета, умение анализировать и сопоставлять стандартные методы решения задач с усложненными условиями в задачах ЕГЭ, навыки в исследовании многочисленных случаев в одной конкретной задаче. Чаще всего школьники привыкают к мысли, что уравнения и неравенства при выбранном способе решения имеют один ход исследования, и забывают, что в зависимости от ситуации уравнения и неравенства, а также их системы, могут иметь различное число корней, не иметь корней совсем или иметь бесконечное количество корней. Как раз такие ситуации возникают при наличии параметров в задаче. Наиболее сложными считаются задачи с двумя и более параметрами. Но чаще всего они быстро сводятся к исследованию задачи с одним параметром за счет введения замены или разбиения задачи на несколько случаев.

Основная часть

По статистике [Анализ результатов ЕГЭ и ОГЭ в Чувашской Республике, 2025], на протяжении всего периода существования единого государственного экзамена многие из выпускников Чувашской Республики не приступают к решению задач с параметрами. Их отпугивает и наличие параметра в условии задачи, и постановка самого условия. Обычно формулировка таких задач отличается от формулировок задач с параметрами, встречающихся в школьных учебниках. Только к концу выпускного класса у школьников формируется необходимая база навыков и умений для исследования сложных многоуровневых задач, к которым относятся и задачи с параметрами. При этом только очень хорошо подготовленные ученики, набирающие 80-100 баллов на ЕГЭ по математике, выполняют задание с параметрами более или менее успешно (Рис. 1). Профильная математика – это пропуск в мир специализированных знаний и современных профессий. Она учит не просто запоминать формулы, а понимать их происхождение, применять в различных контекстах, анализировать условия задачи, находить неочевидные связи и делать обоснованные выводы. Поэтому появление таких заданий на экзаменах далеко не случайно. С их помощью проверяется техника владения математическими формулами, методами решения уравнений и неравенств, умение выстраивать логическую цепочку рассуждений, уровень логического мышления учащихся и их математической культуры.

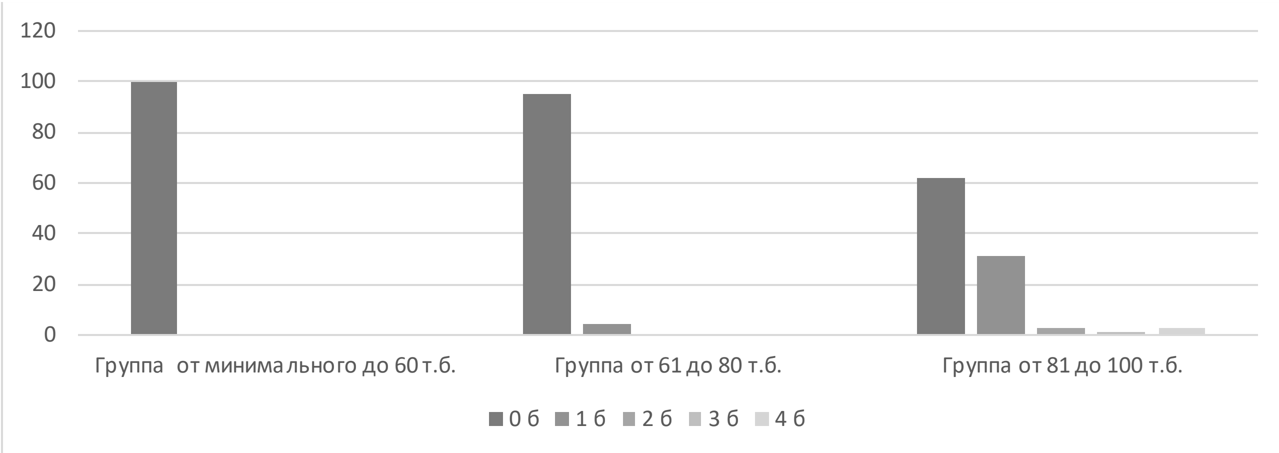

Рисунок 1 – Результаты выполнения задания с параметром в Чувашской Республике в 2025 году в различных группах

Анализ результатов выполнения задания с параметром в Чувашской Республике в 2025 году в различных группах обучающихся, представленных на рисунке 1, показывает, что немногие из выпускников приступают к решению таких задач на едином госэкзамене по профильной математике. Процент верного решения таких задач невысок, всего лишь 2-3%, поэтому приобретение навыков решения трудных, нестандартных заданий, в том числе задач с параметрами, учащимися школ по-прежнему остается актуальным.

Основными методами решения задач с параметрами являются два: аналитический и графический. При аналитическом решении требуется провести исследование задачи при различных значениях параметра с использованием равносильных формул, обоснованных логических рассуждений. Чаще других знаний здесь используются исследование дискриминанта квадратного уравнения, свойства функций (монотонность, экстремумы) и неравенств. Большую роль в правильном решении задач играет умение грамотно использовать метод рационализации и обобщенный метод интервалов. Кажущаяся простота и очевидность в применении приводят к ошибкам в том случае, когда выпускник не имеет достаточного опыта в решении задач такими методами. Так, например, задание ЕГЭ с параметром в Чувашской Республике в 2018 году представляло собой систему уравнений, решение которой не сводилось к графическому анализу, а оформлялось аналитически сведением к квадратным уравнениям с исследованием количества их решений в зависимости от значений параметра. Однозначность подхода упростила работу экспертам, проверяющим это задание, так как критерии проверки полностью соответствовали работам школьников.

Использование графического метода решения означает представление заданных в задаче уравнений и неравенств в виде хорошо известных геометрических объектов (прямых, парабол, окружностей) и исследование построенной геометрической модели в зависимости от поставленного условия [Володина, Ильина, Тимофеева, 2015; Володина, Ильина, Тимофеева, 2016; Васильева, Володина и др., 2022]. Построение графиков функций, зависящих от параметра, и анализ их взаимного расположения позволяет наглядно увидеть, как изменяется количество решений при изменении параметра, и найти эти решения. К примеру, задание в ЕГЭ 2025 года предполагало исследование вспомогательного аргумента и затем уже уточнение количества решений квадратного уравнения в зависимости от значений параметра. Таким образом, фактически задача содержала два основных этапа исследования. При неверном оценивании значений вспомогательной функции дальнейшее исследование уже было неверно, и аналогично при неправильном рассмотрении расположения корней квадратного уравнения. Поэтому общее число решивших задачу оказалось значительно ниже по сравнению с прошлыми годами, когда задачи решались относительно просто графически и достаточно отработанными методами (Рис. 2).

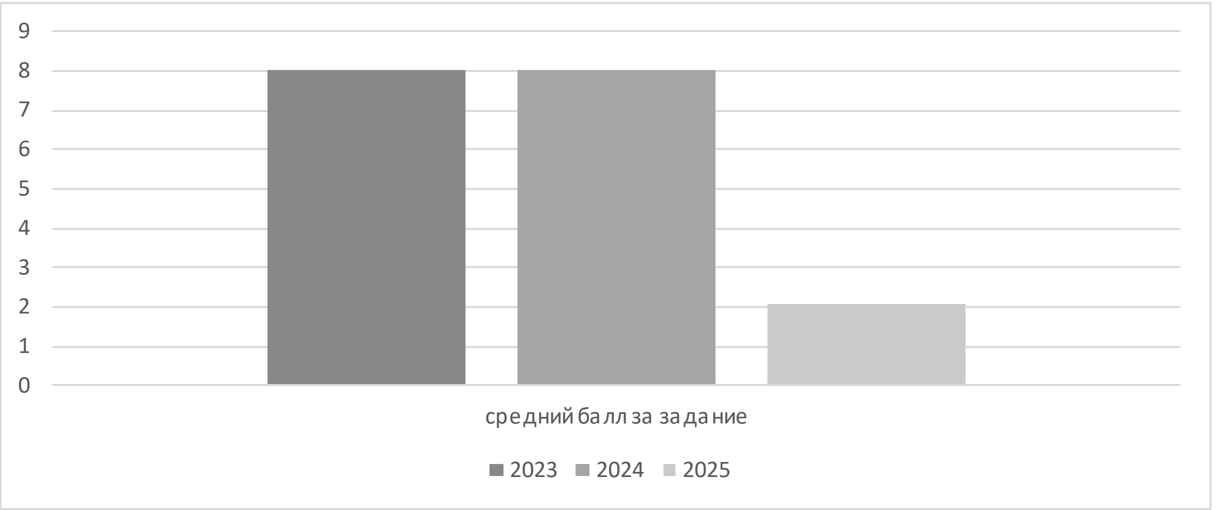

Рисунок 2 – Динамика результатов выполнения задания с параметром в Чувашской Республике в 2023-2025 годах

Существенным моментом при исследовании задач с параметром является обязательность рассмотрения всех возможных случаев значений параметров. Часто выпускники «теряют» важные граничные значения параметров, что приводит иногда к неполному решению, а иногда и к ошибочному решению. Внимательное и неторопливое исследование каждого случая обеспечит полное и точное решение. Но для этого учащимся надо обладать хорошей техникой решения задач с параметрами. Наиболее «подкованные» в решении таких задач могут предложить решение, кардинально отличающееся от экспертного. Такие решения экспертам всегда проверять трудно, но интересно.

Многоплановость подходов и особенно альтернативные способы решения задач – это то, что должен продемонстрировать учитель при разборе заданий повышенной сложности с учащимися. Предложенные учащимися решения, отличающиеся от приведенных в критериях КИМ, наглядно показывают возможность найти более простые, краткие, емкие решения задач и более, на наш взгляд, рациональные. Приведем примеры задач, решения которых в работах учащихся на ЕГЭ оказались рациональнее и быстрее предложенных в КИМ для экспертов.

Пример 1: Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $\left(1-(x+2a+1)^2\right)^3-\left(1-(x+2a+1)^2\right)^2=3^{3|x-2a|}-3^{2|x-2a|}$ имеет хотя бы один корень.

Решение: Решим эту задачу аналитически.

Упростим уравнение

$$\left(1-(x+2a+1)^2\right)^2\left(1-(x+2a+1)^2-1\right)=3^{2|x-2a|}\left(3^{|x-2a|}-1\right)\Rightarrow$$

$$-\left(1-(x+2a+1)^2\right)^2(x+2a+1)^2=3^{2|x-2a|}\left(3^{|x-2a|}-1\right).$$

Найдем множество значений левой и правой частей уравнения, выполнив их оценку. Получим следующие неравенства: $-\left(1-(x+2a+1)^2\right)^2(x+2a+1)^2 \le 0$, $3^{2|x-2a|}\left(\underbrace{3^{|x-2a|}}_{\ge 1}-1\right) \ge 0$. Значит, равенство верно при выполнении следующей системы:

$$\begin{cases} \left(1-(x+2a+1)^2\right)^2(x+2a+1)^2 = 0; \\ 3^{2|x-2a|}\left(3^{|x-2a|}-1\right) = 0. \end{cases}$$

Решать каждое уравнение системы и выбирать общее решение не требуется. Заметим, что второе уравнение имеет только одно решение $x=2a$. Значит, если система имеет решение, то это оно и есть. И тогда оно должно удовлетворять первому уравнению. А другие решения первого уравнения нас не интересуют. Подставив его в первое уравнение, получим искомые значения параметра $a=-\frac{1}{2};-\frac{1}{4};0.$

При данном решении не требуется исследования функции $g(t)=t^3-t^2$ и рассмотрения ее значений в различных точках, как показано в критериях.

Пример 2: Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} 4x-y+a=0, \\ 2|y|-x^2+4x=0 \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

Решение: Решим эту задачу графически.

Перейдем к равносильной системе $\begin{cases} y=a, \\ 2|4x+y|-x^2+4x=0, \end{cases}$ которую можно решить графически в системе координат Oxa [5], рассматривая две параболы относительно прямой $y=-4x$ (Рис. 3). Количество различных решений системы совпадает с количеством общих точек графиков $y=a$ и $2|4x+y|-x^2+4x=0$, что определяется быстро и однозначно, зная вершины парабол и точки пересечения графиков.

Сравнивая данное решение системы $\begin{cases} 4x-y+a=0, \\ 2|y|-x^2+4x=0 \end{cases}$ с представленным в критериях решением системы, видим, что рассмотрение касательных к графику $2|y|=x^2-4x$ требует точного расчета точек касания, проверки количества точек пересечения с обеими параболами, уточнения принадлежности корней соответствующим участкам парабол, так как нужно учитывать только часть графиков при раскрытии модуля функции (Рис. 4.). Таким образом, обоснованное решение будет достаточно объемным, отсутствие же необходимых пояснений в решении влияет на его оценку. Критерии оценивания данного задания сформулированы достаточно универсально, что позволяет применить их как к измененному графическому решению, так и к аналитическому решению уравнения с модулем $2|4x+a|-x^2+4x=0$. Следует отметить, что аналитический подход применили единицы, так как это предполагает решение иррациональных неравенств для проверки принадлежности корней промежуткам знакопостоянства подмодульного выражения.

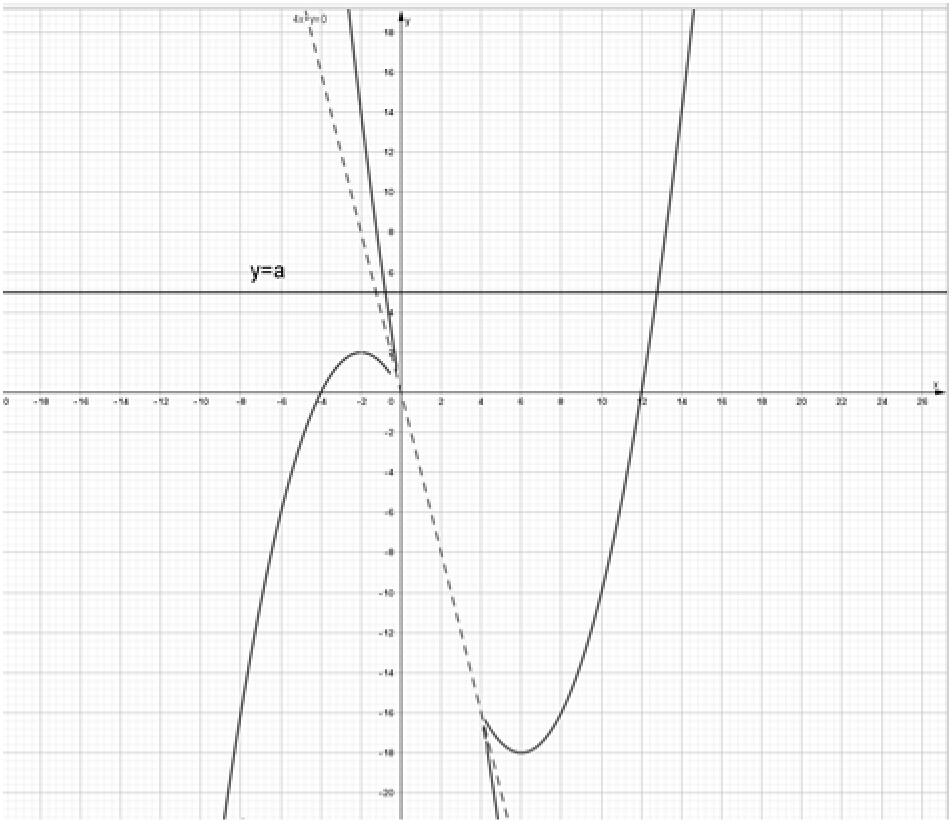

Рисунок 3 – Графическое решение примера 2, предложенное учащимися в работах ЕГЭ

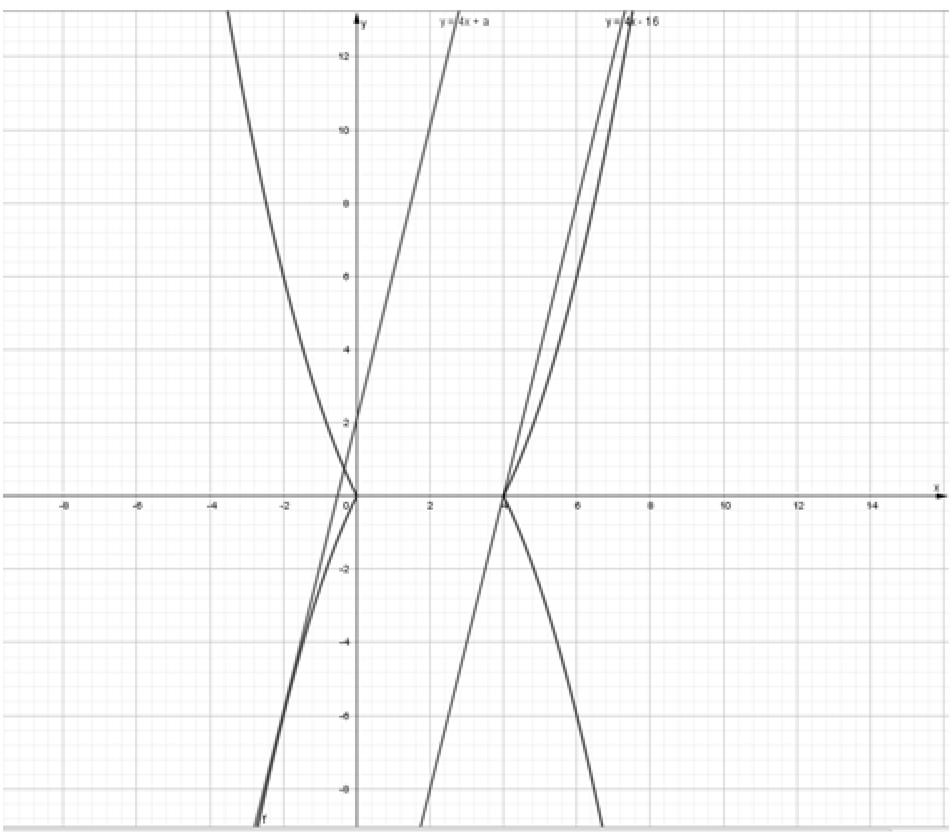

Рисунок 4 – Графическое решение примера 2, предложенное в критериях КИМ

Представленные выше решения задач иллюстрируют многоплановый подход к решению и оцениванию задач с параметром на ЕГЭ. Аналитический и геометрический методы решения одинаково наглядно демонстрируют неоднозначный подход к исследованию задачи и хорошую подготовку некоторых учащихся. Умение учащихся «увидеть» правильное и рациональное решение, а также грамотно его изложить, свидетельствует о высоком уровне подготовки, в первую очередь, учителей, обучающих этих выпускников. Поэтому от экспертов, проверяющих работы, требуется «нешаблонность» мышления при проверке работ и умение скорректировать подход к выставлению баллов за нестандартное решение задачи, а также умение интерпретировать при необходимости имеющиеся критерии. Все вышесказанное свидетельствует о том, что при проверке среди экспертов должны быть выделены те, кто, обладая соответствующими компетенциями наряду с другими членами предметной комиссии, может осуществлять проверку работ и, одновременно, консультирование остальных членов предметной комиссии в сложных ситуациях. Без этого качественная проверка заданий повышенной сложности, на наш взгляд, будет затруднительна. Единый подход к оцениванию решений нисколько не пострадает и даже наоборот выиграет, если процесс проверки будет сопровождаться возможностью проконсультироваться в сложных случаях с экспертом-консультантом по определенному виду задач. Поскольку число работ с особым нестандартным решением бывает небольшим, много времени для консультирования не потребуется, и общей задержки в обработке протоколов не произойдет.

Выводы

С учетом вышесказанного, при подготовке учащихся к решению задач с параметром необходимо учитывать следующие особенности:

- решение задачи по возможности несколькими способами позволяет оценивать сложность того или иного решения и выбирать оптимальное, вместе с тем позволяет проверить уровень овладения математическими компетенциями [Володина, Ильина, Тимофеева, 2016; Васильева, Володина и др., 2022]];
- визуализация с помощью специальных программ, привлечение Web-ресурсов [Володина, Ильина, 2019] помогает ученику в понимании задачи и определении направления ее решения;
- особое внимание следует уделить равносильным переходам при решении уравнений и неравенств, так как применение неравносильных преобразований требует дополнительных условий и их проверки, что значительно усложняет работу;
- чаще практиковать устный счет по отработке вычислительных навыков и знаний классических формул дискриминанта, нахождения корней квадратного уравнения, формул сокращенного умножения, правил перехода к системам и совокупностям, основных свойств и графиков элементарных функций;
- придерживаться при построении графиков классических правил (выбор правильной системы координат, выбор характерных точек, правильное построение графика без лишних частей в области определения функции).

Библиография

1. Анализ результатов Единого государственного экзамена и Основного государственного экзамена в Чувашской Республике в 2019 году: дидактический и статистический аспекты. Чебоксары: БУ «Республиканский центр новых образовательных технологий» Минобразования Чувашии, 2025. 485 с.

2. Васильева Е. В., Володина Е. В. и др. Графическое решение уравнений и неравенств с параметром: учебное пособие. Чебоксары: Изд-во Чуваш. ун-та, 2022.
3. Володина Е. В., Ильина И. И. Решение задач с параметром средствами GEOGEBRA // Состояние и перспективы развития ИТ-образования: сборник докладов и научных статей Всероссийской научно-практической конференции. 2019. С. 382-387.
4. Володина Е. В., Ильина И. И., Тимофеева Н. Н. Преимущества применения интерактивного Web-приложения для поиска решения математических задач с параметром // Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика. 2015. Т. 3. № 8-1 (19-1). С. 305-306.
5. Володина Е. В., Ильина И. И., Тимофеева Н. Н. Разработка интерактивного web-приложения для решения математических задач с параметром с помощью динамической графики // Вестник Северного (Арктического) федерального университета. Серия: Естественные науки. 2016. № 1. С. 97-103.

On Different Approaches to Solving Problems with Parameters on the Unified State Exam in Mathematics

Evgeniya V. Volodina
PhD in Pedagogy,
Associate Professor,
Associate Professor of the Department of Higher Mathematics
and Theoretical Mechanics named after S.F. Saykin,
Chuvash State University named after I.N. Ulyanov,
428000, 15, Moskovsky ave., Cheboksary, Russian Federation;
e-mail: evg_volodina@mail. ru

Elena G. Efimova
PhD in Physics and Mathematics,
Associate Professor of the Department of Actuarial and Financial Mathematics,
Chuvash State University named after I.N. Ulyanov,
428000, 15, Moskovsky ave., Cheboksary, Russian Federation;
e-mail: eg-fmf@mail. ru

Marina E. Sirotkina
PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor,
Associate Professor of the Department of Higher Mathematics
and Theoretical Mechanics named after S.F. Saykin,
Chuvash State University named after I.N. Ulyanov,
428000, 15, Moskovsky ave., Cheboksary, Russian Federation;
e-mail: sme74@mail. ru

Abstract

The article analyzes the dynamics of results for tasks on the Unified State Exam (USE) in mathematics in the Chuvash Republic. Different approaches to solving problems with parameters are studied. It is shown that the solution method may differ significantly from that presented in the assessment criteria. Depending on the chosen solution method for the problem, the assessment

criteria need clarification and, in some cases, modification. All of the above requires a non-standard approach from the USE mathematics expert when checking solutions to problems with parameters.

For citation

Volodina E.V., Efimova E.G., Sirotkina M.E. (2026) O razlichnykh podkhodakh k resheniyu zadach s parametrom na edinom gosudarstvennom ekzamene po matematike [On Different Approaches to Solving Problems with Parameters on the Unified State Exam in Mathematics]. *Pedagogicheskii zhurnal* [Pedagogical Journal], 16 (3A), pp. 177-185. DOI: 10.34670/AR.2026.21.18.023

Keywords

Unified State Exam in Mathematics, mathematics, problems with parameters, alternative approach, analytical method, graphical method, evaluation of solutions.

References

1. Analiz rezultatov Edinogo gosudarstvennogo ekzamena i Osnovnogo gosudarstvennogo ekzamena v Chuvashskoy Respublike v 2019 godu: didakticheskiy i statisticheskiy aspekty [Analysis of the results of the Unified State Exam and the Basic State Exam in the Chuvash Republic in 2019: didactic and statistical aspects]. (2025). Cheboksary: BU “Respublikanskiy tsentr novykh obrazovatelnykh tekhnologiy” Minobrazovaniya Chuvashii.
2. Vasilyeva, E. V., Volodina, E. V., et al. (2022). Graficheskoye resheniye uravneniy i neravenstv s parametrom [Graphical solution of equations and inequalities with a parameter]. Cheboksary: Chuvash University Press.
3. Volodina, E. V., & Ilyina, I. I. (2019). Resheniye zadach s parametrom sredstvami GEOGEBRA [Solving problems with a parameter using GEOGEBRA]. In Sostoyaniye i perspektivy razvitiya IT-obrazovaniya (pp. 382-387).
4. Volodina, E. V., Ilyina, I. I., & Timofeeva, N. N. (2015). Preimushchestva primeneniya interaktivnogo Web-prilozheniya dlya poiska resheniya matematicheskikh zadach s parametrom [Advantages of using an interactive web application for finding solutions to mathematical problems with a parameter]. Aktualnyye napravleniya nauchnykh issledovaniy XXI veka: teoriya i praktika, 3(8-1), 305-306.
5. Volodina, E. V., Ilyina, I. I., & Timofeeva, N. N. (2016). Razrabotka interaktivnogo web-prilozheniya dlya resheniya matematicheskikh zadach s parametrom s pomoshchyu dinamicheskoy grafiki [Development of an interactive web application for solving mathematical problems with a parameter using dynamic graphics]. Vestnik of Northern (Arctic) Federal University. Series: Natural Sciences, (1), 97-103.