УДК 519.7

Математическая психология, нейронные сети и распознавание

Гилёв Денис Викторович

Старший преподаватель,
Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б.Н. Ельцина,
620002, Российская Федерация, Екатеринбург, ул. Мира, 19;
e-mail: deni-gilev@narod.ru

Мазуров Владимир Данилович

Профессор,
Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б.Н. Ельцина,
620002, Российская Федерация, Екатеринбург, ул. Мира, 19;
e-mail: vldmazurov@gmail.com

Аннотация

В данной статье рассматриваются задачи и модели выбора, диагностики состояний человека и группы людей, прогнозирования и интерпретации в математической психологии. Приводятся основные понятия и примеры практических задач в указанной сфере. Авторы отмечают, что математическая психология – это не только математическая статистика, а более общее – имитация сознания, в которой самым эффективным средством являются нейронные сети. Аппарат имитации сознания – это аппарат оснований математики и математической психологии. Результаты работы показывают, что математические методы активно используются для решения прикладных задач психологии. В связи с тем, что описанные задачи плохо формализуемые, для них приходится использовать аппарат распознавания образов и нейронные сети. Показано использование булевых функций и комитетных конструкций в задаче коллективного выбора. Отмечено, что математика в психологии может успешно решать утилитарные задачи диагностики, прогнозирования и классификации. Полученные вследствие применения математического аппарата результаты являются материалом для дальнейшего исследования психологических явлений и вырабатывания конкретной методики в той или иной ситуации.

Для цитирования в научных исследованиях

Гилёв Д.В., Мазуров В.Д. Математическая психология, нейронные сети и распознавание // Психология. Историко-критические обзоры и современные исследования. 2019. Т. 8. № 3А. С. 21-27.

Ключевые слова

Булевы функции, метод комитетов, имитация сознания, психология, нейронные сети.

Введение

Психология по своей природе противостоит слишком прямой формализации, но при этом ее задача состоит в расшифровке неформализованного, в раскрытии латентных комплексов, бессознательных стимулов. Еще одной из важных ее задач является обнаружение архетипов поведения. При всем этом в последнее время психологии все труднее справляться без математики. В качестве примеров математических моделей в психологии можно привести следующие: применение латентного анализа и распознавание образов для обнаружения скрытых факторов поведения и психологической диагностики; построение моделей и использование нейронных сетей для описания и имитации психологических феноменов. Полученные вследствие применения математического аппарата результаты будут являться материалом для дальнейшего исследования психологических явлений и вырабатывания конкретной методики в той или иной ситуации. При этом стоит отметить, что математика в психологии может успешно решать и утилитарные задачи диагностики, прогнозирования и классификации.

Неформализованные задачи психологии

Дж. Сорос, говоря о прогнозировании в финансовой сфере, подчеркнул, что эта область не описывается математикой, скорее это сфера психологии масс. С этой точкой зрения сложно согласиться, так как существуют совершенные и мощные методы для моделирования закономерностей в психологии, такие как методы Ю.И. Журавлёва, методы С.А. Айвазяна, а также методы нейронных сетей, где используется математика.

Вообще, методы в психологии имеют давнюю историю. Так, еще классик психологии И.Ф. Гербарт в работе [Гербарт, 1895] рассмотрел возможность применения методов математического анализа в этой области. Затем возникло научное направление «когнитивная нейропсихология», в рамках которого изучаются познавательные процессы у человека. Мы знаем, что математики не любят слово «когнитивный», но хотим заметить, что в этом случае оно употреблено по делу. В 2003 году были четко объяснены и прописаны методы обработки данных и знаний в психологии в источнике [Сидоренко, 2003]. Правда, в нем утверждается, что «брак» психологии с математикой – это брак по принуждению, и приводятся слова: «Глубокое родство математики с физикой привело к опасному представлению о том, что всякое явление обязано иметь математическую модель. Это представление тем опаснее, что оно часто считается само собой разумеющимся» [там же]. Стоит отметить, что авторы основываются на собственном опыте работы в области математической физики и математической статистики.

Переходя к более продвинутым методам, вначале рассмотрим математику и прагматику в моделировании нейродинамики с помощью пороговой логики – в рамках теории нейронных сетей. Ярким примером прагматики этой математической технологии является ее применение в художественном творчестве. В этой области есть трудноуловимая грань, когда накопленные приемы, например, в театре, могут превратиться в какой-то момент из ремесленничества в какие-то неожиданности, намеки на неведомые глубины бытия. В нашем понимании понятие искусства неформализуемо в принципе. И хотя на каждый конкретный момент это понятие выразимо, последовательность понятий во времени не сходится к какому-либо пределу.

Булевы функции для решения неформализуемых задач психологии

В связи с вышесказанным становится понятно, что задача психологии – задача плохо или совсем неформализуемая, поэтому предлагается работать с булевыми функциями и дискретными сетями.

Начнем с алфавита. Минимальный работающий алфавит – двухбуквенный. Буквы могут быть любыми; обычно используют буквы (цифры) 0 и 1. На вход сети в моменты 0, 1, 2, … подаются слова в этом алфавите, на выходе – тоже слова в этом алфавите. Слова могут быть любой длины, вплоть до бесконечной. Бесконечномерный случай изучен И.И. Ерёминым и В.Д. Мазуровым в [Еремин, Мазуров, 1997].

Стоит упомянуть, что имеются логические сети – такие сети, в которых выход однозначно определяется входом, а также автоматы, у которых есть память. В таких сетях на входе слово x, на выходе – слово $f(x)$. Функция f называется переключательной, или булевой, если и аргументы, и значения суть 0,1.

Сеть – это ориентированный граф, в его вершинах стоят логические элементы, в качестве входов и выходов служат ребра графа. К каждому ребру – стрелке из i-й вершины в j-ю приписан вес – вещественное число a_{ij}, на которое умножается сигнал из i в j. Слоистая сеть описывается суперпозициями функций.

Число всех возможных n-буквенных слов равно 2^n, а число всех возможных булевых функций равно 2^{2^n}. В качестве переключательных функций одного переменного используются константа нуль, переменная x, инверсия x, константа 1. Булевы функции подробно рассматриваются в [Гуревич, Журавлёв, 1974].

Утверждение: система булевых функций функционально полна, если произвольную булеву функцию можно представить суперпозицией функций этой системы.

Задача анализа сети заключается в фиксации ее реакций на материал наблюдений. Синтез сети – подбор весов функций, разделяющих заданные множества. Подбираем функцию Ф вида:

$$\Phi(x) = \sum_i z_i \phi_i(x), \tag{1}$$

чтобы эта функция принимала нужные значения на векторах x из материала наблюдений. С учетом (1) получаем систему линейных неравенств:

$$\begin{cases} \Phi(x) \geq 0, & если \quad x \in A, \\ \Phi(x) < 0, & если \quad x \in B. \end{cases} \tag{2}$$

Для нахождения функционально полных наборов мы применяем пять классов булевых функций:

1) функции, сохраняющие нуль: Ф(0,0…,0) = 0;

2) функции, сохраняющие единицу: Ф(1,1…1) = 1;

3) самодвойственные функции, то есть на каждой паре противоположных векторов они приобретают противоположные значения;

4) аффинные булевы функции;

5) монотонные булевы функции.

Теорема В.М. Глушкова о функциональной полноте гласит: чтобы система булевых функций была функционально полной, необходимо и достаточно, чтобы эта система включала хотя бы одну булеву функцию, не сохраняющую нуль; хотя бы одну булеву функцию, не сохраняющую единицу; хотя бы одну нелинейную и неаффинную булеву функцию; хотя бы одну немонотонную булеву функцию; хотя бы одну несамодвойтвенную булеву функцию.

Доказательство:

1. Необходимость. Легко видеть, что при данном классе булевых функций суперпозиция любого набора функций этого класса является функцией этого же класса. Отсюда и вытекает необходимость.

2. Достаточность доказана в [Глушков, 1962].

Легко видеть, что операции конъюнкции и дизъюнкции коммутативны, ассоциативны и дистрибутивны. Это обстоятельство позволяет достаточно эффективно строить комитетные нейронные сети по заданным обучающим множествам.

Прагматика этого подхода обширна. В нее вписывается теория атрибуций. Атрибуция – дословно – приписывание причины. С другой стороны, атрибуция – психологический термин в социальной психологии, означающий механизм объяснения причин поведения другого человека; реальное наделение людей качествами, причинами поведения. Эта теория связана с математическими методами в социальной психологии. В этом случае в рамках атрибуции индивид приписывает некоторые характеристики другому индивиду или социальному объекту. Теория атрибуций основана на том предположении, что важен прошлый опыт, он и дает основание атрибуции.

Стартовая разработка этой теории – разработка американского психолога Ф. Хайдер, описанная в [Heider, 1944]. Он был первым социальным психологом, который стал анализировать, каким именно образом человек пытается понять причины поведения других людей. Собственно, как оказалось, это задача факторного анализа. Ведь факторы – это некие глубинные признаки, а математические методы помогают обнаружить их [Мазуров, 2016].

Нормальные формы и методы имитации человеческого сознания

Возвращаясь к методам математической логики, которая применяется и в задачах атрибуций, заметим, что в типовых представлениях логических высказываний используются нормальные формы выражений.

Произведение различных переменных с их отрицаниями или без них – это элементарное произведение. Дизъюнкция элементарных произведений – дизъюнктивная нормальная форма. Произведение всех переменных, взятых с отрицаниями или без них, – конституента единицы. Дизъюнкция конституенты единицы – совершенная дизъюнктивная нормальная форма. Любая булева функция имеет единственную совершенную дизъюнктивную нормальную форму.

Аналогичные операции приводят к конъюнктивной нормальной форме, которые используются в имитации человеческого сознания.

Стоит заметить, что математическая психология – это не только математическая статистика, а более общее – это имитация сознания, в которой самое эффективное средство – нейронные сети. Аппарат имитации сознания – это аппарат оснований математики и математической психологии.

Методами имитации человеческого сознания являются анализ и синтез искусственных нейронных сетей; распознавание образов; кластерный анализ; математическая статистика; поиск систем различных представителей.

Тесно с понятием имитации сознания связана фундаментальная проблема обоснования теории множеств. Речь идет о возможности выбора для системы множеств по элементу из каждого множества. Понятия выбора и системы представителей являются предметом обсуждения многих авторов. Явное упоминание об аксиоме выбора впервые встречается у Дж. Пеано в его статье 1890 года. Беппо Леви в 1902 году заметил, что для некоторых теорем теории множеств их доказательства зависят от возможности выбора в каждом множестве по элементу. Ранее Г. Кантор применял подобный выбор, не осознавая, что пользуется операцией, требующей обоснования. Здесь рассмотрим коллективный выбор.

Заметим, что предшественницей теоремы существования комитета, в том числе «слабого существования» [Мазуров, 2013], является теорема Холла о представителях множеств, доказанная им в 1935 году.

Рассмотрим выбор испытания sup $\{f(x)$: $x \in \mathrm{co}X\}$, где X – конечное множество базисных испытаний, $X \subset Rn$, co – символ выпуклой оболочки. К этой схеме имеет отношение задача выбора множеств, представляющих систему M множеств. Испытания в этой задаче – назначения различных элементов из заданной системы множеств. Множества $M_1,\ldots, M_m$ образуют систему M. Каждое испытание – матрица $[x(i,j)]$, где $x(i,j) = 1$, если элементу $a(i)$ отвечает множество M_j и $x(i,j) = 0$ в противном случае. Каждая матрица состоит из единиц и нулей. В каждом столбце одна единица, в каждой строке – не более одной единицы. Тогда задача поиска систем различных представителей для системы M представляется задачей линейного программирования. В ней целевая функция есть $\sum_i a(i, j)x(i, j)$.

Матрица $A = [a(i,j)]$. Ограничения: неотрицательность переменных, их сумма по j не больше единицы, аналогичные неравенства по столбцам.

Получаем задачу линейного программирования. Анализируя двойственную задачу, получаем *теорему Холла*: система различных представителей для системы M существует только в том случае, когда каждые k множеств системы содержат не менее k различных элементов.

Заключение

Таким образом, авторами были рассмотрены задачи и модели выбора, диагностики состояний человека и группы людей, прогнозирования и интерпретации в математической психологии. Результаты работы показывают, что математические методы активно используются для решения прикладных задач психологии. В связи с тем, что описанные задачи плохо формализуемые, для них приходится использовать аппарат распознавания образов и нейронные сети. Авторами статьи было показано использование булевых функций и комитетных конструкций в задаче коллективного выбора. Полученные вследствие применения математического аппарата результаты являются материалом для дальнейшего исследования психологических явлений и вырабатывания конкретной методики в той или иной ситуации.

Библиография

1. Гербарт И.Ф. Психология. СПб.: Пантеон литературы, 1895. 278 с.
2. Глушков В.М.. Синтез цифровых автоматов. М.: Физматгиз, 1962. 476 с.
3. Гуревич И.Б., Журавлёв Ю.И. Минимизация булевых функций и эффективные алгоритмы распознавания // Кибернетика. 1974 . № 3. С.16-20.

4. Еремин И.И., Мазуров В.Д. Итерационный метод обучения дискриминации бесконечных множеств // Кибернетика. 1977. № 5. С. 108-110.
5. Мазуров В.Д. Консилиумы решающих правил и «слабое» существование // Вестник Уральского института экономики, управления и права. 2013. № 2. С. 93-97.
6. Мазуров В.Д. The factor analysis and the search for an objective meaning of factors as a function of meaning of (names) features // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника. 2016. Т. 16. № 3. С. 137-142.
7. Сидоренко Е.В. Методы математической обработки в психологии. СПб.: Речь, 2003. 350 с.
8. Хайкин С. Нейронные сети. Киев: Вильямс, 2006. 1104 с.
9. Ясницкий Л.Н. Введение в искусственный интеллект. М.: Академия, 2005. 176 с.
10. Heider F. Social perception and phenomenal causality // Psychological Review. 1944. No. 51. P. 358-374

Mathematical psychology, neural networks and recognition

Denis V. Gilev

Senior Lecturer,
Ural Federal University named after the first President of Russia B.N. Yeltsin,
620002, 19, Mira st., Ekaterinburg, Russian Federation,
e-mail: deni-gilev@narod.ru

Vladimir D. Mazurov

Professor,
Ural Federal University named after the first President of Russia B.N. Yeltsin,
620002, 19, Mira st., Ekaterinburg, Russian Federation,
e-mail: vldmazurov@gmail.com

Abstract

The article discusses the tasks and models of choice, the diagnosis of the conditions of a person and a group of people, forecasting and interpretation in mathematical psychology. The basic concepts and examples of practical tasks in this area are given. The authors note that mathematical psychology is not only mathematical statistics, but more general – an imitation of consciousness, in which neural networks are the most effective means. The apparatus for simulating consciousness is the apparatus of the foundations of mathematics and mathematical psychology. The results of the work show that mathematical methods are actively used to solve applied problems of psychology. Due to the fact that the described tasks are poorly formalized, they have to use an image recognition apparatus and neural networks. The authors of the article show the use of Boolean functions and committee constructions in the problem of collective choice. It is noted that mathematics in psychology can successfully solve the utilitarian problems of diagnosis, prediction and classification. The results obtained as a result of using the mathematical apparatus are the material for further study of psychological phenomena and the development of a specific technique in a given situation.

For citation

Gilev D.V., Mazurov V.D. (2019) Matematicheskaya psikhologiya, neironnye seti i raspoznavanie [Mathematical psychology, neural networks and recognition]. *Psikhologiya. Istoriko-kriticheskie obzory i sovremennye issledovaniya* [Psychology. Historical-critical Reviews and Current Researches], 8 (3A), pp. 21-27.

Keywords

Boolean functions, committee method, imitation of consciousness, psychology, neural networks.

References

1. Eremin I.I., Mazurov V.D. (1977) Iteratsionnyi metod obucheniya diskrimina-tsii beskonechnykh mnozhestv [Iterative method of teaching discrimination of infinite sets]. *Kibernetika* [Cybernetics], 5, pp. 108-110.
2. Gerbart I.F. (1895) *Psikhologiya* [Psychology]. Saint Petersburg: Panteon literatury Publ.
3. Glushkov V.M. (1962) *Sintez tsifrovykh avtomatov* [The synthesis of digital machines]. Moscow: Fizmatgiz Publ.
4. Gurevich I.B., Zhuravlev Yu.I. (1974) Minimizatsiya bulevykh funktsii i effek-tivnye algoritmy raspoznavaniya [Minimization of Boolean functions and effective recognition algorithms]. *Kibernetika* [Cybernetics], 3, pp.16-20.
5. Heider F. (1944) Social perception and phenomenal causality. *Psychological Review*, 51, pp. 358-374
6. Khaikin S. (2006) *Neironnye seti* [Neural networks]. Kiev: Vil'yams Publ.
7. Mazurov V.D. (2013) Konsiliumy reshayushchikh pravil i "slaboe" sushche-stvovanie [Councils decision rules and "weak" existence]. *Vestnik Ural'skogo instituta ekonomiki, upravleniya i prava* [Bulletin of the Ural Institute of Economics, Management and Law], 2, pp. 93-97.
8. Mazurov V.D. (2016) The factor analysis and the search for an objective meaning of factors as a function of meaning of (names) features. *Vestnik Yuzhno-Ural'skogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Komp'yuternye tekhnologii, upravlenie, radioelektronika* [Bulletin of the South Ural State University. Series: Computer Technologies, Management, Electronics], 16 (3), pp. 137-142.
9. Sidorenko E.V. (2003) *Metody matematicheskoi obrabotki v psikhologii* [Methods of mathematical processing in psychology]. Saint Petersburg: Rech' Publ.
10. Yasnitskii L.N. (2005) *Vvedenie v iskusstvennyi intellect* [Introduction to artificial intelligence]. Moscow: Akademiya Publ.